# Leichtes Lehrbuch der Arithmetik für die ersten Anfänger

von

D. Friedr. Wilhelm Daniel Snell,
Professor der Philosophie zu Gießen.

Vierte verbesserte Auflage.

Gießen und Darmstadt,
bey Georg Friedrich Heyer 1813.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

# Vorerinnerung.

Bey der zweyten Auflage dieses Lehrbuchs wurde darauf gesehen, die eingeschlichenen Druckfehler der ersten Auflage zu verbessern, hie und da durch kleine Zusätze und Veränderung des Ausdrucks die Gegenstände noch deutlicher darzustellen, und beyde Theile in noch genauere Verbindung zu bringen. Uebrigens wird der Verleger, wie bisher, sowohl beyde Theile zusammen, als

auch jeden einzeln verkaufen. Die arithmetischen Uebungsaufgaben sind zum Theil aus andern Büchern zusammengetragen, zum Theil auch aus andern Beyspielen nachgebildet. Wer an die Rechnung mit andern Münz- Maaß- Gewicht- rc. Sorten gewöhnt ist, kann diese leicht an die Stelle der hier gebrauchten setzen.

Auch bey der dritten und vierten Auflage ist das Ganze sorgfältig durchgesehen worden. Hie und da sind kleine Zusätze eingeschaltet worden.

---

# Erster Abschnitt.

## Von den Rechnungsarten mit ganzen Zahlen.

### §. 1.

### Erklärung.

Alle Zahlen sind Zeichen für die Vorstellungen von der Menge gewisser Dinge, die als gleichartig, nach dem, was sie gemeinschaftlich haben, betrachtet werden. Alle Größen können als gleichartig angesehen, und also die Menge der einzelnen Theile mit Zahlen dargestellt werden. Z. B. die Menge von Stücken Geld, von Menschen, Thieren, von Theilen einer Linie, eines Pfundes u. s. w.

Die Rechenkunst (Arithmetik) beschäftigt sich mit den Eigenschaften und Verhältnissen der Zahlen, und zeigt, wie man aus bekannten Zahlen und ihren Verhältnissen unbekannte finden soll.

Sollte z. B. eine Summe von 6 Gulden 5mal genommen werden, so findet man aus den bekannten Zahlen 5 und 6

die unbekannte 32. Oder sollte 42 in 6 gleiche Theile getheilt werden, so findet man die Zahl 7, weil jeder Theil so viel enthält. Die Arithmetik ist daher der Grund aller mathematischen Wissenschaften, weil sich alle Größen durch Zahlen ausdrücken lassen.

## §. 2.
## Erklärung.

Es ist willkührlich, welcher Zeichen man sich bedienen will, um Zahlen darzustellen. Wir gebrauchen dazu jetzo die gewöhnlichen Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Diese sind hinreichend, alle Zahlen, sie mögen so groß seyn als man wolle, zu schreiben. Die Methode, wie man entweder mit denselben irgend eine ausgesprochene Zahl schreiben, oder eine geschriebene Zahl aussprechen soll, heißt das **Numeriren.**

## §. 3.
## Willkührlicher Satz.

Um mit so wenigen Ziffern alle Zahlen schreiben zu können, wird ihnen ausser dem Werthe, den sie an sich von ihrer Figur haben, noch ein andrer Werth von der Stelle, in welcher sie stehen, ertheilt. Jede Ziffer bedeutet zehnmal mehr, als vorher, wenn sie um eine Stelle von der rechten zur linken fort-

fortrückt, und zehnmal weniger, als vorher, wenn sie um eine Stelle von der linken zur rechten fortrückt. Daher heißen die Ziffern in der ersten Stelle die Einer, die in der 2ten Stelle zur linken die Zehner, die in der 3ten die Hunderte, die in der 4ten die Tausende u. s. w. Z. B. 7777 heißt siebentausend, siebenhundert, siebzig und sieben. Wenn in einer Stelle keine Ziffer vorhanden ist, so wird sie mit einer Nulle ausgefüllt, z. B. 70 heißt siebzig, 707 heißt siebenhundert und sieben, da hier die Zehner fehlen.

Gehen die Zahlen über die Tausende, so folgen in der fünften Stelle zur linken die Zehntausende, in der 6ten Stelle die Hunderttausende, in der 7ten Stelle die Tausendmaltausende oder Millionen. Nun folgen ferner die Zehnmillionen, Hundertmillionen u. s. w. Tausendmaltausend Millionen machen eine Billion, tausendmaltausend Billionen eine Trillion, und so folgen die Quadrillionen, Quintillionen u. s. w. Die Billionen stehen in der 13ten Stelle zur linken, die Trillionen in der 19ten, die Quadrillionen in der 25sten u. s. w. Z. B. 8 mit zwölf angehängten Nullen sind acht Billionen, 4 mit dreißig angehängten Nullen sind vier Quintillionen.

Darin, daß man anfänglich nach den zehn Fingern zählte, ist wahrscheinlich der

der Grund zu suchen, warum man die Zahl zehn als die Grundzahl angenommen, und alle Ziffern nach Klassen, die zehnfach im Werthe steigen, geordnet hat. Man hätte eben so gut auch eine andre Zahl als Grundzahl annehmen können.

## §. 4.

### Aufgabe.

Eine geschriebene Zahl auszusprechen.

Man theile sie von der rechten zur linken in Klassen von drey Ziffern, so, daß man zwischen die 3te und 4te, zwischen die 6te und 7te, zwischen die 9te und 10te u. s. w. einen Punkt oben ansetzt. Bey den zweyten Punkt setze man einen Strich, bey den 4ten zwey Striche, bey den 6ten drey Striche. Nun bedeuten, von der rechten zur linken, die drey ersten Ziffern die Einer, Zehner, Hunderte; die Ziffern zwischen dem 1ten und 2ten Punkte, die Eintausende, Zehntausende, Hunderttausende; die vor dem 2ten Punkte mit einem Striche, die Ein Millionen, Zehn Millionen, Hundert Millionen, Tausend Millionen, Zehntausend Millionen, Hunderttausend Millionen; die vor dem Punkte mit 2 Strichen die Ein Billionen, Zehn Billionen ꝛc.; die vor dem Punkte mit 3, 4 Strichen, die Trillionen, Quadrillionen u. s. w. Jede Ziffer vor einem Punkte bedeutet also Tau-

Tausende, nur daß vor dem 2ten Punkte tausendmaltausende (Millionen), vor dem 3ten tausend Millionen, vor dem 4ten tausendmaltausend Millionen (Billionen) ꝛc. stehen.

Nach geschehener Abtheilung ist es leicht, die Zahl von der linken zur rechten zu lesen. Z. B.

2 · 489 · 756 · 537 · 621.

Zwey Billionen, vierhundert und neun und achtzig tausend siebenhundert und sechs und funfzig Millionen, fünfhundert und sieben und dreyßig tausend sechshundert und ein und zwanzig.

80 · 600 · 010 · 450 · 000 · 036 · 020

Achtzig Trillionen, sechsmalhundert tausend und zehn Billionen, vierhundert und funfzig tausend Millionen, sechs und dreyßigtausend und zwanzig.

## §. 5.

## Aufgabe.

Eine ausgesprochene Zahl aufzuschreiben.

Man fange von der linken an, setze zwischen die Ziffer die vorigen Zeichen, und wo Stellen leer sind, setze man Nullen hin. Eine kleine Uebung verschaffet bald eine ziemliche Fertigkeit im Zahlenschreiben, so, daß man der Punkte und Striche nicht mehr bedarf.

§. 6.

## §. 6.

### Erklärung.

Die Zahlen sind entweder ganze oder gebrochene. Die kleinste Zahl ist 1, alle andere ganze sind Vielfache von eins. Die gebrochene Zahlen bedeuten nur einen Theil von einer gewissen Einheit, z. B. Dreyfünftheil von einem Gulden. Das Ganze wird in gleiche Theile getheilt, und davon einer oder mehrere genommen. Wenn ich einen Gulden in 5 gleiche Theile theile, und drey davon nehme; so machen dieselben zusammen weniger, als das Ganze aus. Diese Dreyfünftel heißen ein Bruch. (Davon mehr im 2ten Abschnitte).

Man theilt die Zahlen ferner in unbenannte und benannte ein, z. B. drey ist eine unbenannte Zahl, weil nicht bestimmt ist, was für drey Dinge sie bedeuten soll: aber drey Thaler ist benannt, weil die Art der Dinge, deren Menge sie bezeichnen soll, bestimmt ist. Wenn man die Regeln, wie man mit unbenannten Zahlen rechnen soll, gefaßt hat; so ist es leicht, sie auch auf benannte anzuwenden.

§. 7.

## §. 7.

### Erklärung.

Da jede Veränderung, die mit einer Zahl vorgenommen werden kann, entweder in Vermehrung oder in Verminderung derselben besteht; so gründen sich darauf die vier Rechnungsarten, Addition, Subtraction, Multiplication und Division. Die erste und dritte vermehren, die zweyte und vierte vermindern.

Die Addition besteht in der Zusammenzählung verschiedener Zahlen.

Diese gegebenen Zahlen heißen die Posten, die Zahl, welche man sucht, heißt die Summe. Das Zeichen der Addition ist $+$; es wird durch das Wörtchen und angegeben. (Das Zeichen der Gleichheit zweyer Größen ist $=$). Wenn z. B. die Posten 6, 8 und 9 sind, so ist die Summe 23. Oder $6 + 8 + 9 = 23$. Dieses heißt, 6 und 8 und 9 sind gleich 23.

Die Multiplication ist die Zusammenzählung einer und derselben Zahl mehrmal.

Z. B. $6 + 6 + 6 + 6 = 24$. Dieses ist eigentliche Addition; sie wird aber dadurch verkürzt, daß man 6 viermal nimmt. Das Zeichen ist ein liegendes Kreuz $\times$, oder ein Punkt, und wird durch mal ausgesprochen. Z. B. $4 \times 6 = 24$

oder

oder 4 . 6 = 24, vier mal sechs ist vier und zwanzig. Die beyden Zahlen, welche multiplicirt werden, heißen Multiplicandum und Multiplicator, oder auch die beyden Factoren. Die Zahl, welche herauskommt, das Product oder Factum.

Die Subtraction besteht darinn, daß eine Zahl von einer andern einmal abgezogen wird.

Die erste ist der Subtrahendus, die andere der Minuendus. Was übrig bleibt, ist der Rest, oder der Unterschied (Differenz). Das Zeichen ist ein Querstrich —, und wird durch weniger ausgesprochen. Z. B. 8 — 6 = 2, acht weniger sechs ist gleich zwey.

Die Division ist das Abziehen einer Zahl von einer andern, so oft es möglich ist. Z. B.

30 — 5 = 25
25 — 5 = 20
20 — 5 = 15
15 — 5 = 10
10 — 5 = 5
5 — 5 = 0

Hier kann 5 von 30 sechsmal abgezogen werden. Man will nämlich wissen, wie oft 5 in 30 enthalten sey. Dieses erfährt man, wenn man dreyßig mit fünf dividirt. Die erste Zahl heißt das Dividendum, die letztere der Divisor, und die Zahl 6, welche anzeigt, wie oft der letztere im ersten steckt, ist der Quotient. Das Zeichen sind entweder zwey

Punkte

Punkte :, oder ein Querstrich, über welchem das Dividendum, und unter welchem der Divisor steht, 30 : 5 = 6, oder $\frac{30}{5}$ = 6, dreyßig durch fünf getheilt ist gleich sechs. Also steckt 5 in 30 sechsmal. Die Division kann grade aufgehen, wie hier, oder es kann auch ein Rest bleiben, z. B. 20 : 6 = 3, und bleiben 2 zum Rest.

Aus diesem Begriffe folgt, daß Dividiren auch heiße, eine gewisse Zahl in so viele gleiche Theile theilen, als eine andere Zahl (der Divisor) Einheiten enthält. Der Quotient zeigt an, wie groß ein solcher Theil ist. Wenn z. B. die Summe von 30 fl in 5 gleiche Theile getheilt wird, so ist jeder Theil = 6 fl.

So wie das Multipliciren ein verkürztes Addiren ist, so ist das Dividiren ein verkürztes Subtrahiren.

### §. 8.

Einige Grundsätze, welche in der ganzen Mathematik und also auch in der Rechenkunst ihre Anwendung finden, sind folgende.

Jede Größe ist sich selbst gleich, so wie auch in ihren Theilen zusammen genommen. Z. B. 60 = 40 + 20. 1 Carolin = 4 Laubthalern.

Eine Größe ist größer, als jeder ihrer Theile.

Zwey Größen, die beyde einer dritten gleich sind, sind unter einander selbst gleich. Z. B. 6 · 8 = 48, 20 + 28 = 48, also 6 · 8 = 20 + 28. Ferner 11 fl. = 4 Laubthalern, 1 Carolin = 4 Laubthalern, also 1 Carolin = 11 fl.

Was

Was größer oder kleiner ist, als eine von zwey gleichen Größen, ist auch größer oder kleiner als die andere. Z. B. $40 : 8 = 5$. Nun ist 4 kleiner als 5, also auch kleiner als $40 : 8$. Ferner 6 ist größer als 5, daher auch größer als $40 : 8$. Zwischen zwey ungleiche Größen kann man das Zeichen $<$ setzen, so daß die Spitze desselben gegen die kleinere von beyden Größen gekehrt ist, z. B. $6 < 9$ (sechs ist kleiner als neun), $8 > 5$ (acht ist größer als fünf.)

Wenn zu zwey gleichen Größen gleiches addirt, oder davon gleiches subtrahirt wird, oder wenn beyde mit gleichem multiplicirt oder dividirt werden, so bleibt das, was heraus-kömmt, noch gleich. Z. B.

$$\begin{array}{rcl} 4 \cdot 6 & = & 24 \\ 12 & & 12 \quad \text{addirt} \\ \hline 36 & = & 36 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 20 : 5 & = & 4 \\ 3 & & 3 \quad \text{abgezogen} \\ \hline 1 & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 70 & = & 2 \cdot 35 \\ 2 & & 2 \quad \text{multiplicirt} \\ \hline 140 & = & 140 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 80 & = & 30 + 50 \\ 4 & & 4 \quad \text{dividirt} \\ \hline 20 & = & 20 \end{array}$$

Hier-

Hieraus folgt, daß wenn gleiche Größen zu ungleichen addirt, oder von ihnen abgezogen, oder mit ihnen multiplicirt, oder dividirt werden, auch ungleiche Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten auf beyden Seiten herauskommen müssen.

## §. 9.

## Aufgabe.

Unbenannte ganze Zahlen zu addiren.

Man setze die Posten so, daß die Einer, Zehner, Hunderte rc. untereinander stehen, und zähle jede Klasse besonders zusammen. Diese einzelne Summen der Einer, Zehner, Hunderte rc. werden hernach zu einer Hauptsumme zusammen gezogen.

$$
\begin{array}{r}
23815 \\
623 \\
97 \\
98442 \\
\hline
17 \\
160 \\
1800 \\
11000 \\
110000 \\
\hline
122977
\end{array}
$$

Dieses geschieht kürzer, wenn man jedesmal für zehn Einheiten einer jeden Ordnung eine Einheit zur nächstfolgenden Ordnung zur linken hinzusetzt.

|  |
|---:|
| 23815 |
| 623 |
| 97 |
| 98442 |
| 122977 |

§. 10.

## Aufgabe.

Benannte Zahlen zu addiren.

Setze die verschiedenen Sorten (von Geld, Gewicht, Maaßen u. d. g.) gehörig untereinander, und fange von der geringsten an nach vorhergehender Aufgabe zu addiren. Da es bekannt seyn muß, wie viele Einheiten einer geringern Sorte eine Einheit der nächst höhern Sorte ausmachen; so verwandle man, wenn es nöthig ist, die Summe der niedern Sorten in Einheiten der nächst höhern, und rechne sie zu diesen letztern.

| fl. | | kr. | | dl. |
|---:|---|---:|---|---:|
| 24 | — | 52 | — | 3 |
| 12 | — | 40 | — | 2 |
| 110 | — | 50 | — | 2 |
| 5 | — | 57 | — | 3 |
| 154 | — | 21 | — | 2 |

§. 11.

## Aufgabe.

Subtraction mit unbenannten Zahlen.

Die Zahlen werden, wie bey der Addition, nach ihren Klassen untereinander geordnet; darauf fängt man von der rechten

ten an, und zieht die Einer, Zehner, Hunderte ꝛc. von den darüber stehenden Einern, Zehnern, Hunderten ꝛc. ab, und schreibt jedesmal den Rest unter den Strich. Z. B.

$$\begin{array}{r} 68497 \\ 25301 \\ \hline 43196 \end{array}$$

Wenn in einer oder der andern Ordnung die obere Ziffer kleiner, als die untere ist, so daß man nicht abziehen kann; so leihe man zu der obern Ziffer von der zunächst zur linken stehenden höhern Ordnung eine Einheit, welche alsdann diese Ziffer um 10 Einheiten vermehret. Damit man wisse, daß die Zahl in der höhern Ordnung, von welcher geliehen worden ist, um eines weniger gelte; so bezeichne man sie mit einem Punkte.

$$\begin{array}{r} 8\dot{2}4\dot{3}6 \\ 30617 \\ \hline 51819 \end{array}$$

Die obere Zahl ist durch das Leihen nur in anderen Theilen dargestellt worden, als vorher, hat aber an ihrem Werthe keine Veränderung erlitten. Es ist nämlich folgendes Beyspiel mit dem vorigen einerley.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 80000 & + & 1000 & + & 1400 & + & 20 & + & 16 \\ 30000 & + & 0 & + & 600 & + & 10 & + & 7 \\ \hline 50000 & + & 1000 & + & 800 & + & 10 & + & 9 \end{array}$$

das ist 51819.

Wenn in einer oder etlichen Stellen der höhern Ordnung Nullen stehen, so leihe

leihe man über die Nullen weg, von der zur linken zunächst stehenden Ziffer, und lasse nun die Nullen als Neune gelten. Also hat das Abziehen keine Schwierigkeit.

$$\begin{array}{r} \dot{6}0004 \\ 25869 \\ \hline 34135 \end{array}$$

Von den 60000 kommen 10000 in die folgende Stelle, von diesen 1000 in die dritte (daher bleiben 9000 in der 2ten stehen), von diesen 100 in die 4te (also bleiben 900 in der 3ten stehen), und endlich von diesen 10 in die 5te Stelle (weswegen 90 in der 4ten stehen bleibt.) Die ganze Rechnung sieht nun so aus.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 50000 & + & 9000 & + & 900 & + & 90 & + & 14 \\ 20000 & + & 5000 & + & 800 & + & 60 & + & 9 \\ \hline 30000 & + & 4000 & + & 100 & + & 30 & + & 5 \end{array}$$

dieses ist 34135.

## §. 12.

## Aufgabe.

### Subtraction mit benannten Zahlen.

Man setze die Sorten gehörig untereinander, fange bey der kleinsten zur rechten an abzuziehen, und gehe darauf zu den größern fort. Z. B.

$$\begin{array}{rcrcr} \text{fl.} & & \text{kr.} & & \text{dl.} \\ \dot{2}\dot{2}4 & - & \dot{4}0 & - & 3 \\ 126 & - & 31 & - & 2 \\ \hline 98 & - & 9 & - & 1 \end{array}$$

Wenn

Wenn bey einer Sorte die obere Zahl kleiner als die untere ist, so leihet man von der nächst höhern Sorte eine Einheit dazu, wodurch die Zahl um so viele Einheiten vermehrt wird, als deren von der niedern in einer Einheit der höhern enthalten sind.

| Centner. | Pf. | Loth. |
|---|---|---|
| 48 | 12 | 4 |
| 12 | 20 | 16 |
| 35 | 91 | 20 |

| fl. | kr. | dl. |
|---|---|---|
| 100 | : | 2 |
| 80 | 24 | 3 |
| 19 | 35 | 3 |

Von dem geliehenen Gulden kommen 59 kr. in die 2te und 1 kr. in die 3te Stelle.

## §. 13.

Die Addition und Subtraction dienen sich wechselseitig zur Probe.

1) Nach geschehener Addition schneide man den obersten Posten ab, addire die übrigen Posten, und ziehe diese zwente Summe von der ganzen Summe ab; der Rest muß so groß seyn, als der obere abgeschnittene Posten.

| | | |
|---|---|---|
| 489 | | 63725 |
| 256 | 256 | 10479 |
| 734 | 734 | 82724 |
| 1479 | 990 | 156928 |
| 990 | | 93203 |
| 489 | | 63725 |

2) Nach geschehener Subtraction addire man den Rest zu der untern abgezogenen Zahl (dem Subtrahendus), so erhält man, wenn die Rechnung richtig ist, zur Summe die obere Zahl.

$$\begin{array}{r} \dot{8}\,\dot{3}\,2\,\dot{5}\,6 \\ 2\,5\,9\,1\,7 \\ \hline 5\,7\,3\,3\,9 \\ \hline 8\,3\,2\,5\,6 \end{array}$$

Am leichtesten überzeugt man sich von der Richtigkeit dieser und anderer Rechnungen, wenn man sie wiederhohlt, und dann sieht, ob dieselbe Zahl, wie vorher, herauskömmt. Ist dieses nicht der Fall, so hat man wenigstens einmal gefehlt, und muß die Arbeit noch eiumal vornehmen.

## §. 14.

### Erklärung.

Eine Tafel, welche die Producte aller Einer enthält, ist das sogenannte Einmaleins. Es ist bey dem Multipliciren und Dividiren nothwendig.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

Man

Man findet nun z. B. das Product 30 von den Factoren 5 und 6, wenn man von der obenstehenden 6 herabgeht, bis man in die Querreihe kömmt, deren erste Ziffer zur linken 5 ist. Auf eben diese Art findet man auch alle andere Producte.

## §. 15.

## Aufgabe.

**Multiplication mit unbenannten Zahlen.**

Wenn der untere Factor eine einzelne Ziffer ist, so nehme man nach dem Einmaleins die Einer, Zehner, Hunderte ꝛc. des obern Factors so oft, als der untere Factor Einheiten enthält, und schreibe die letzte Ziffer jedes Products unter diejenige Ziffer, welche multiplicirt worden ist. Die einzelnen Producte werden addirt; ihre Summe enthält dann den ganzen obern Factor so oft, als der untere Einheiten enthält.

```
  6 8 2 5 9
          7
  ---------
        6 3
      3 5
    1 4
  5 6
4 2
-----------
4 7 7 8 1 3
```

Auf kürzere Art geschieht dieses, wenn jede 10 Einheiten einer niedern Klasse als eine Einheit zu der zunächst höheren gerechnet werden.

```
  6 8 2 5 9
          7
-----------
4 7 7 8 1 3
```

Wenn der untere Factor aus mehrern Ziffern besteht, so wird mit jeder derselben die Multiplication des obern Factors vorgenommen. Jedes Products letzte

Ziffer zur rechten, kömmt unter diejenige Ziffer des obern Factors zu stehen, welche multiplicirt worden ist. Denn da die Zehner, Hunderte, Tausende &c. des untern Factors eine, zwey, drey &c. Nullen haben, so müssen eben so viele Stellen in den Producten zur rechten leer bleiben. (Sie können aber auch mit Nullen ausgefüllt werden). Alle Producte werden hierauf addirt. Die Summe enthält den obern Factor so vielmal, als der untere Einheiten hat.

```
   62573          7394
     246          1629
  ------         -------
  375438          66546
 250292          147880
125146          4436400
--------        7394000
15392958       ---------
               12044826
```

Wenn der eine Factor eine oder mehrere Nullen zur rechten hat, so werden nur die Ziffern multiplicirt, und dem Producte die Nullen angehängt. Sollte z. B. 7 mit 40 multiplicirt werden, so ist dieses eben so viel, als 7 mit 4 mal 10, oder 4 mal 7 mit 10 multipliciren, $28 \cdot 10 = 280$. Eben so ist $6 \cdot 300 = 6 \cdot 3 \cdot 100 = 18 \cdot 100 = 1800$.

Haben beide Factoren Nullen zur rechten, so werden, nach geschehener Multiplication der Ziffern, dem Producte so viele Nullen angehängt, als beyde Factoren zusammen haben.

Z. B. $70 \cdot 60 = 7 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 10 = 42 \cdot 100 = 4200$.

Ferner $400 \cdot 20 = 4 \cdot 2 \cdot 100 \cdot 10 = 8 \cdot 1000 = 8000$.

Fer-

Ferner $6000 \cdot 800 = 6 \cdot 8 \cdot 1000 \cdot 100 = 48 \cdot 100000 = 4800000$.

## §. 16.

### Lehrsatz.

Jeder Factor steckt im Producte so oft, als der andere Einheiten enthält.

Denn wenn man sich 4 Reihen denkt, deren jede 5 Einheiten enthält, so ist das Product 20. Man kann sich aber auch eben so gut 5 Reihen denken, in deren jeder 4 Einheiten untereinander stehen. Dieses giebt auch 20. Daher ist es gleichgültig, welcher Factor als das Multiplicandum, und welcher als der Multiplicator angesehen wird, oder $5 \cdot 4 = 4 \cdot 5$.

o o o o o
o o o o o
o o o o o
o o o o o

## §. 17.

### Aufgabe.

Multiplication mit benannten Zahlen.

Da der Multiplicator hier eine unbenannte Zahl ist, und man die verschiedenen Sorten des Multiplicandi so oft nehmen soll, als der erstere Einheiten enthält, so fange man die Multiplication mit der geringsten Sorte an, und gehe zu den höhern fort. Enthält ein Product einer geringern Sorte so viel, daß eine oder mehrere Einheiten der höhern darinn stecken; so rechne man diese zu dem Producte der höhern Sorte, und lasse nur den Rest stehen.

ſſ.

| fl. | Alb. | dl. |
|---|---|---|
| 242 — | 20 — | 4 |
| | | 9 |
| 2178 — | 180 — | 36 |
| 6 | 4 | |
| 2184 — | 4 — | 4 |

## §. 18.

## Aufgabe.

Division mit unbenannten Zahlen.

Man schreibe den Divisor zur linken des Dividendi hinter einen Strich. Wir wollen zuerst den Fall nehmen, daß der Divisor nur aus einer Ziffer bestehe. Man sehe nun, wie oft er in der höchsten oder den zwey höchsten Ziffern des Dividendi enthalten sey. Die Zahl, die dieses anzeigt, ist der Quotient, welcher zur rechten hinter einen Strich geschrieben wird. Man multiplicire den Quotient mit dem Divisor, und ziehe das Product von den Ziffern ab, in welche dividirt worden ist. Zu dem Reste schreibe man die nächstfolgende Ziffer des Dividendi, und frage nun, wie vielmal der Divisor in diesen enthalten sey. Dieses wird bey jeden folgenden Ziffern wiederholt, bis man nach und nach alle Theile des Quotienten bekömmt, diese werden zuletzt addirt.

Da man wissen will, wie oft der Divisor im Dividendo steckt; so muß man jedesmal das Product des Quotienten und Divisors abziehen. Ist es zu groß, so, daß es sich nicht abziehen läßt: so muß die Ziffer des Quotienten um eine verringert werden. Wenn

Wenn bey der Division zuletzt ein Rest bleibt, so enthält das Dividendum den Divisor ein= oder etlichemal ganz, und noch etwas von ihm darüber, welches keine ganze Zahl mehr beträgt. (Dieses giebt einen Bruch, wovon im 2ten Abschnitte).

| | |
|---|---|
| 9 \| 842715 \| | 90000 |
| 810000 | 3000 |
| 32715 | 600 |
| 27000 | 30 |
| 5715 | 5 |
| 5400 | 93635 |
| 315 | |
| 270 | |
| 45 | |
| 45 | |
| 0 | |

Auf kürzere Art kann man die Ziffern des Quotienten ohne Nullen gleich neben einander setzen, so bekommen sie doch von der Stelle, worinn sie stehen, den Werth, welcher ihnen gehört.

| | |
|---|---|
| 8 \| 76351 \| | 9543 |
| 72 | |
| 43 | |
| 40 | |
| 35 | |
| 32 | |
| 31 | |
| 24 | |
| 7 | |

Wenn der Divisor aus mehrern Ziffern besteht, so wird auf dieselbe Art verfahren. Auch hier müssen die Producte aus den Theilen des Quotienten in den Divisor von den Ziffern des Dividendi nach und nach abgezogen werden.

```
243 | 653079 | 2687
      486
      ----
      1670
      1458
      ----
       2127
       1944
       ----
        1839
        1701
        ----
         138
```

§. 19.

## Aufgabe.

Division mit benannten Zahlen.

Zuerst wird die höchste Sorte dividirt, und wenn etwas übrig bleibt, so werden die Einheiten dieses Restes in Einheiten der nächst kleinern Sorte verwandelt, und zu den Ziffern dieser nächst kleinern Sorte addirt. Man dividirt hierauf von neuem, und verfährt bey allen übrigen Sorten eben so.

```
        fl.      Alb.      dl.
    8 | 33  —    5         =
                30
8 | 33 | 4   8 | 35 | 4   8 | 24 | 3
    32           32           24
    --           --           --
     1            3            0
```

Also der Quotient 4 fl. 4 Alb. 3 dl.

Cent-

```
       Centner           Pf.          Loth
10 | 101        —        11      —      8
                        100            32
10 | 101 | 10  10 | 111 | 11  10  40  | 4
     100                110
       1                  1
```

Also der Quotient 10 Centner 11 Pf. 4 Loth.

## §. 20.

Multiplication und Division dienen sich wechselseitig zur Probe.

Da jeder Factor im Producte so oft steckt, als der andere Factor Einheiten enthält (§. 16.): so darf man nur nach geschehener Multiplication das Product mit dem einen Factor dividiren, und der andere wird als Quotient herauskommen, wenn richtig gerechnet worden ist.

```
         4 2 9
           2 6
       -------
       2 5 7 4
       8 5 8
     ---------
2 6 | 1 1 1 5 4 | 4 2 9
      1 0 4
      --------------------
          7 5
          5 2
        -------
        2 3 4
        2 3 4
        -------
            0
```

Da

Da der Divisor so oft im Dividendo enthalten ist, als der Quotient Einheiten enthält; so darf man nur nach geschehener Division den Quotienten mit dem Divisor multipliciren, und das Product wird dem Dividendo gleich seyn, wenn richtig gerechnet worden ist. Doch muß, wenn bey der Division etwas übrig geblieben ist, dieser Rest zu dem Producte gerechnet werden.

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 8427 | 2106 |
| | 8 | 4 |
| | 4 | 8424 |
| | 4 | 3 |
| | 27 | 8427 |
| | 24 | |
| | 3 | |

## §. 21.

## Erklärung.

Alle ganze Zahlen sind entweder **einfache** (**Primzahlen**) oder **zusammengesetzte**. Einfache sind solche, welche keine Produkte aus zwey ganzen Zahlen sind (wenn man 1 und die einfache Zahl selbst ausnimmt), z. B. 11, 17, 293. Die zusammengesetzten sind, (welche aus zwey oder mehrern einfachen durch die Multiplication entstehen, z. B. 4 = 2 · 2,

$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Jedes Product läßt sich daher in seine einfache Factoren zerlegen oder zerfällen. Primzahlen lassen sich in keine ganze Zahlen als Factoren zerfällen. (Ausser dem Falle, der schon angemerkt worden ist, $11 = 1 . 11$, $17 = 1 . 17$. Dieses ist aber keine eigentliche Zerfällung.)

## §. 22.

### Erklärung.

Eine Zahl, die in einer andern aufgeht, wenn sie damit dividirt wird, heißt ein Maas derselben.

Alle zusammengesetzten Zahlen lassen sich durch ihre einfachen und den aus ihnen zusammengesetzten Factoren ohne Rest dividiren, und haben sie also zum Maas. Z. B. 36 hat 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 zum Maase. Mehrere Zahlen können ein gemeines Maas haben, z. B. 18 und 24 haben 6 zum gemeinen Maase, weil sie sich beyde dadurch ohne Rest dividiren lassen. Wenn sie auch mehrere gemeine Maase haben, so ist doch eins das größte gemeine Maas. Z. B. von 24 und 32 ist 8 dieses Maas, obgleich auch 2 und 4 in ihnen aufgehen.

Zahlen, die kein gemeines Maas haben, wenn sie auch selbst zusammengesetzt sind, heißen Primzahlen unter sich, z. B. 8 und 21, oder 14 und 15.

Wenn eine Zahl in einem von den Factoren eines Products aufgeht, so ist sie

selbst

selbst ein Factor dieses Products, z. B. 30 ist $= 2 \cdot 15$. Da nun 5 in 15 aufgeht, so geht es auch in 30 auf.

Geht eine Zahl in den verschiednen Theilen einer Summe auf, so ist sie auch ein Factor dieser Summe. Z. B. $64 = 24 + 40$. Nun geht 8 in 24 und 40 auf, also auch in 64. Es ist

$$\frac{24}{8} + \frac{40}{8} = \frac{64}{8} = 8.$$

Wenn von zwey Zahlen die kleinere in der größern aufgeht, so ist die erstere das größte gemeine Maas von beyden: z. B. 35 und 70. Die erstere steckt in sich selbst einmal, und in 70 zweymal.

Geht sie aber nicht darin auf, so kann dieses Maas nicht größer seyn, als der bey der Division bleibende Rest. Geht dieser Rest in der kleinern auf, so muß er auch in der größern aufgehen, und ist also das größte gemeine Maas, z. B. wenn 77 durch 35 dividirt wird, so bleibt 7 zum Rest; dieses geht in 35 auf, also auch in $77 = 2 \cdot 35 + 7$.

# Zweyter Abschnitt.

## Von der Rechnung mit gebrochenen Zahlen oder Brüchen.

### §. 23.

### Erklärung.

Da ein Bruch (§. 6.) aus einem oder mehreren gleichen Theilen eines gewissen Ganzen besteht, so muß man erstlich angeben, in wie viele gleiche Theile das Ganze getheilt worden sey, zweytens wie viel davon zu einem gegebenen Bruch gehören sollen. Dieses wird durch zwey Zahlen ausgedrückt, welche der Nenner und der Zähler heißen, wovon der letztere über, der erstere unter einen Querstrich gesetzt wird.

Wenn man z. B. 18 kr. als einen Bruch von einem Gulden angeben will, so theilt man das Ganze in 60 gleiche Theile, davon werden 18 gesetzt, $\frac{18}{60}$ = 18 kr. Hier ist 18 der Zähler, 60 der Nenner. Würde der Gulden in 10 gleiche Theile getheilt, so ist einer davon = 6, also 18 kr. = $\frac{3}{10}$ fl.

§. 24.

## §. 24.

### Erklärung.

Wenn der Zähler kleiner als der Nenner ist, so ist der Bruch nur ein Theil vom Ganzen, und heißt ein ächter Bruch, z. B. $\frac{3}{7}$. Wenn der Zähler entweder dem Nenner gleich oder größer als derselbe ist, so hat man einen unächten Bruch. Z. B. $\frac{7}{7} = 1$, $\frac{9}{7} = 1\frac{2}{7}$. Die unächten Brüche können eigentliche oder uneigentliche seyn; die ersten sind solche, in welchen bey der Division des Zählers durch den Nenner ein Rest bleibt, die andern aber, in welchen diese Division grade aufgeht.

Diese letztere sind also im Grunde von ganzen Zahlen nicht verschieden, und sind nur in der Form eines Bruches ausgedrückt. Man kann sie daher durch die Division des Zählers mit dem Nenner wieder in ganze Zahlen verwandeln. Z. B. die Brüche $\frac{8}{4}$, $\frac{12}{4}$, $\frac{24}{6}$ sind uneigentliche. Denn $\frac{8}{4} = 2$, $\frac{12}{4} = 3$, $\frac{24}{6} = 4$. Aber $\frac{8}{5}$, $\frac{9}{4}$ sind eigentliche Brüche. Denn $\frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$, $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$. Eine solche ganze Zahl mit einem angehängten Bruche heißt eine gemischte Zahl oder ein gemischter Bruch.

## §. 25.

### Lehrsatz.

Jeder Bruch kann als ein Quotient angesehen werden, der entsteht, wenn man den Zäh-

Zähler als Dividendum durch den Nenner als Divisor theilt.

Wenn ich z. B. 8 durch 5 dividire, so bekomme ich $\frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$. Dieses lehrt erstlich, daß der fünfte Theil von 8 gleich $1\frac{8}{5}$ ist; zweytens, daß 5 in 8 einmal ganz, und noch $\frac{3}{5}$ davon stecken. Ferner, wenn 12 durch 3 dividirt wird, so bekömmt man $\frac{12}{3} = 4$. Also ist 4 der dritte Theil von 12, ferner steckt 3 in 12 viermal. Wenn daher bey der Division in ganzen Zahlen (§. 18.) ein Rest bleibt, so wird dem in ganzen Zahlen gefundenen Quotienten noch ein Bruch angehängt, dessen Zähler der Rest, und Nenner der Divisor ist, z. B. $21 : 4 = 5\frac{1}{4}$. Wenn 21 durch 4 dividirt wird, so steckt das letztere fünfmal im erstern, und 1 bleibt zum Reste. In diesem steckt von 4 noch $\frac{1}{4}$, also ist der ganze Quotient $5\frac{1}{4}$.

Auch die eigentliche ächte Brüche sind als Quotienten anzusehen, die durch die Division des Zählers mit dem Nenner entstehen. Da der Nenner hier größer als der Zähler ist, so muß der Quotient kleiner als ein Ganzes seyn. Wenn z. B. 3 durch 5 dividirt werden soll, so erhält man zum Quotienten $\frac{3}{5}$, das heißt, 5 steckt nur zum Theil in 3, dieser Theil ist $\frac{3}{5}$. Wollte man z. B. wissen, wie groß das Stück von einem Gulden sey, das in 36 Kreuzer enthalten ist; so müßte man 36 mit 60 dividiren: dieses ist $36 : 60$ oder $\frac{36}{60}$ oder $\frac{3}{5}$. Das heißt: 36 Kr. machen

keinen

keinen ganzen Gulden, sondern nur $\frac{3}{5}$ davon aus.

§. 26.

## Lehrsatz.

Wenn der Zähler klein und der Nenner groß ist, so ist der Werth des Bruches klein. Denn das Ganze ist in viele gleiche Theile getheilt, wovon wenige den vorgegebenen Bruch ausmachen. Z. B. $\frac{2}{100}$, $\frac{1}{1000}$. Wenn aber umgekehrt der Zähler groß und der Nenner klein ist, so folgt aus dem vorigen Grunde, daß der Werth des Bruches groß ist. Z. B. $\frac{20}{2}$, $\frac{4000}{5}$.

§. 27.

## Lehrsatz.

Ein Bruch wird auf zweyfache Art desto größer im Werthe, entweder je größer der Zähler bey ungeändertem Nenner, oder je kleiner der Nenner bey ungeändertem Zähler wird.

Z. B. $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{10}{10}$, $\frac{20}{10}$, $\frac{100}{10}$ wachsen in dem Verhältnisse, wie die Zähler wachsen, weil das Ganze immer nur in 10 Theile getheilt ist. Ferner $\frac{3}{48}$, $\frac{3}{24}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{3}{1}$ wachsen in dem Verhältnisse, wie die Nenner abnehmen, weil die Theile, worin das ganze getheilt wird, immer um so viel größer werden.

## §. 28.

### Lehrsatz.

Ein Bruch wird auf zweyfache Art in seinem Werthe desto kleiner, entweder je kleiner der Zähler bey ungeändertem Nenner, oder je größer der Nenner bey ungeändertem Zähler wird.

Z. B. $\frac{10}{15}$, $\frac{9}{15}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{6}{15}$, $\frac{5}{15}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{1}{15}$. Da die Theilung des Ganzen dieselbe bleibt, so nimmt der Werth mit dem Zähler ab. — Ferner $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$. Je mehr Theile aus demselben Ganzen gemacht werden, desto kleiner muß einer von diesen Theilen ausfallen. Aus diesen Sätzen folgt, 1) daß man einen Bruch um so vielmal vergrößern kann, als eine Zahl Einheiten hat, wenn man entweder seinen Zähler damit multiplicirt, oder den Nenner damit dividirt (wenn es ohne Rest geschehen kann), z. B. $\frac{8}{9}$ ist 4mal so gros, als $\frac{2}{9}$, weil 8 viermal so gros als 2 ist. Ferner $\frac{1}{2}$ ist 4mal so gros, als $\frac{1}{8}$, weil $8 : 4 = 2$; 2) daß man ihn so vielmal verkleinern kann, wenn man entweder den Zähler damit dividirt, oder den Nenner multiplicirt. Z. B. $\frac{4}{15}$ ist dreymal kleiner, als $\frac{12}{15}$, weil $12 : 3 = 4$. — Ferner, $\frac{2}{9}$ ist dreymal kleiner, als $\frac{2}{3}$, weil der Nenner dreymal größer geworden ist.

## §. 29.

### Lehrsatz.

Wenn Zähler und Nenner eines Bruchs mit einer und derselben Zahl multiplicirt oder

dividirt werden, so ändert sich der Werth des Bruchs nicht.

Z. B. $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$, da Zähler und Nenner mit 2 multiplicirt worden sind, und durch das erste der Werth des Bruchs so vielmal vergrößert, als durch das zweyte verkleinert worden ist. Ferner $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, wo Zähler und Nenner mit 2 dividirt worden sind, und durch das erste der Bruch so vielmal verkleinert, als durch das letzte vergrößert worden ist. Da also sowohl durch das Multipliciren als Dividiren Zähler und Nenner in gleichem Verhältnisse geändert werden, so wird sich der Werth des Bruches nicht ändern.

## §. 30.

## Folgesätze.

Daher kann man jeden Bruch auf sehr vielerley Art ausdrücken.

Z. B. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{10}{20}$ rc. Oder $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{12}{20} = \frac{15}{25}$ rc.

Auch kann man eine ganze Zahl erhalten, die dem Zähler gleich ist, wenn man den Zähler mit dem Nenner multiplicirt, z. B. $\frac{5}{8}$ mit 8 multiplicirt, giebt 5.

Denn wenn der achte Theil von 5 achtmal genommen wird, so entsteht wieder 5. Das ist, $\frac{5}{8} . 8 = \frac{40}{8} = 5$.

Ferner kann man eine ganze Zahl in einen unächten Bruch von gleichem Werthe verwandeln, wenn man sie mit irgend einer andern

Zahl

Zahl multiplicirt (welches Product den Zähler giebt), und diese andre Zahl als Nenner darunter setzt. Denn dadurch wird die Zahl um eben so viel vermehrt, als sie vermindert wird, z. B. $3 = \frac{3 \cdot 7}{7} = \frac{21}{7} = \frac{4 \cdot 8}{8} = \frac{32}{8}$.

Endlich kann man einen gemischten Bruch (§. 24.) in einen gleichgeltenden unächten Bruch verwandeln, wenn man die ganze Zahl mit dem Nenner des angehängten Bruchs multiplicirt, zu diesem Producte den Zähler addirt, und den vorigen Nenner beybehält, z. B. $6\frac{2}{5} = \frac{5 \cdot 6 + 2}{5} = \frac{32}{5}$ Ferner $4\frac{3}{4} = \frac{4 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{19}{4}$.

Hier wird die ganze Zahl in einen unächten Bruch von gleichem Nenner mit dem daran gehängten verwandelt, und beyde werden addirt. Man nennt dieses gemischte Brüche **einrichten**.

## §. 31.

### Erklärung.

Ein Bruch wird **aufgehoben**, wenn Zähler und Nenner, wofern es möglich ist, in kleinern Zahlen ausgedrückt werden (völlig aufgehoben, wenn die kleinsten Zahlen,

die Statt finden, genommen werden), ohne daß sich der Werth des Bruchs ändert.

Dieses geschiehet, indem Zähler und Nenner mit einer und derselben Zahl dividirt werden (§. 29.), ohne daß ein Rest bleibt. Z. B. $\frac{10}{24} = \frac{5}{12}$ oder $\frac{42}{63} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$. Zähler und Nenner werden zuerst mit 3, hernach mit 7 dividirt. Aechte Brüche, deren Zähler eine Primzahl, der Nenner ein Vielfaches derselben ist, lassen sich durch den Zähler heben, z. B. $\frac{11}{44} = \frac{1}{4}$.

Nicht alle Brüche lassen sich aufheben. Denn Zähler und Nenner müssen einen Factor miteinander gemein, oder ein gemeinschaftliches Maas haben (§. 22.), womit sie dividirt werden können. Wenn aber dieses der Fall nicht ist, entweder daß beyde Primzahlen unter sich, oder absolute Primzahlen sind (§. 21.); (so daß der Zähler im Nenner nicht aufgeht); so läßt sich der Bruch nicht aufheben, z. B. $\frac{8}{15}$, $\frac{15}{28}$ oder $\frac{11}{13}$, $\frac{17}{23}$.

## §. 32.

## Aufgabe.

Wie kann man finden, ob und mit welcher Zahl sich ein Bruch aufheben lasse?

1) Wenn sich Zähler und Nenner leicht in einfache Factoren zerfällen lassen, so thue man dieses. Findet sich ein gemeinschaftlicher Factor, so ist dieser die Zahl, mit welcher sich Zähler und Nenner dividiren, und der Bruch aufheben läßt, z. B.

$$\frac{14}{21} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{2}{3}.$$

Wenn

Wenn mehrere Factoren gemeinschaftlich sind, so ist das Product derselben die Zahl, mit welcher sich der Bruch aufheben läßt. Man streicht alsdann die gemeinschaftlichen Factoren oben und unten weg. Z. B.

$$\frac{40}{44}=\frac{2\cdot2\cdot2\cdot5}{2\cdot2\cdot11}=\frac{2\cdot5}{11}=\frac{10}{11};\ \frac{2\cdot3\cdot5}{2\cdot7\cdot5}=\frac{30}{70}=\frac{3}{7};\ \frac{2310}{9350}=\frac{2\cdot5\cdot11\cdot7\cdot3}{2\cdot5\cdot11\cdot5\cdot17}=\frac{7\cdot3}{5\cdot17}=\frac{21}{85}.$$

2) Oefters lassen sich gemeinschaftliche Factoren ohne Mühe finden. Zähler und Nenner lassen sich ohne Rest dividiren:

a) durch 2, wenn sie beyde grade Zahlen sind;

b) durch 3 oder 9, wenn sich die Summe der einzelnen Ziffern, die alle als Einer betrachtet werden, durch 3 oder 9 ohne Rest dividiren läßt. Diese Summe kann die Quersumme heißen. Z. B. $\frac{2343}{8931}$, die Quersumme des Zählers ist 12, des Nenners 21, beydes läßt sich mit 3 heben, also auch der Bruch, $3 \mid \frac{2343}{8931} \mid \frac{781}{2977}$. Ferner $\frac{495}{891}$ läßt sich durch 9 heben, weil dieses die Quersummen des Zählers und Nenners (beyde gleich 18) thun; $9 \mid \frac{495}{891} \mid \frac{55}{99}$;

c) durch 4, wenn sich die beiden letzten Ziffern zur rechten durch 4 heben lassen. Denn die Hunderte, Tausende rc. lassen sich ohnehin durch 4 heben, z. B. $\frac{424}{316}=\frac{106}{79}$. Denn 24 und 16 lassen sich durch 4 heben;

d)

d) durch 5, wenn die letzte Ziffer 5 oder 0 ist, da die Zahlen 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35 u. s. w. als Vielfache von 5 anzusehen sind;

e) durch 6, jede grade Zahl, die sich durch 3 heben läßt, weil 2 · 3. = 6. Z. B. $\frac{2130}{4824} = \frac{355}{804}$;

f) durch 8, wenn die drey letzte Ziffern zur rechten eine Zahl ausmachen, die sich durch 8 heben läßt. Denn die Tausende, Zehntausende ꝛc. lassen sich ohnehin durch 8 heben. Z. B. $\frac{4120}{5256} = \frac{515}{657}$;

g) durch 10, 100, 1000 ꝛc. wenn zur rechten 1, 2, 3 ꝛc. Nullen angehängt sind, z. B. $\frac{240}{250} = \frac{24}{25}$, $\frac{100}{3000} = \frac{1}{30}$, $\frac{4000}{8000} = \frac{1}{2}$;

h) durch 12, wenn sich die Zahl durch 3 und zugleich durch 4 aufheben läßt, weil 3 mal 4 = 12, z. B. $\frac{12}{648} = \frac{1}{54}$.

3) Wenn man nach diesen Regeln nicht finden kann, ob Zähler und Nenner ein gemeinschaftliches größtes Maas haben, und welches dasselbe sey; so verfahre man auf folgende Art. Man dividire den Nenner durch den Zähler, hierauf den Zähler (als vorigen Divisor) durch den Rest, wenn einer bleibt, und so ferner jedesmal den vorigen Divisor durch den Rest, bis entweder keiner mehr bleibt, oder 1 übrig bleibt. Im ersten Falle ist der letzte Divisor die Zahl, mit welcher sich der Bruch heben läßt; im letzten Falle läßt sich der Bruch gar nicht heben. Z. B. $\frac{169}{455}$ läßt sich mit 13 heben.

```
169 | 455 | 2
    | 338 |
    -------
     117 | 169 | 1
             117
           -------
             52 | 117 | 2
                | 104 |
                -------
                   13 | 52 | 4
                      | 52 |
                      ------
                         0
```

$\frac{169}{455} = \frac{13 \cdot 13}{13 \cdot 35} = \frac{13}{35}$. Denn da 13 in 52 aufgeht, so muß es auch in $117 = 2 \cdot 52 + 13$, also auch in $169 = 117 + 52$, endlich in $455 = 2 \cdot 169 + 117$ aufgehen. Wäre aber der letzte Rest 1, so ließen sich die Zahlen nur durch 1 ohne Rest heben, welches dieselben nicht kleiner macht.

## §. 33.

## Erklärung.

Wenn zwey oder mehrere Brüche einerley Nenner haben, so heißen sie gleichnamig, z. B. $\frac{2}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{9}{6}$. Wenn die Nenner verschieden sind, und man sucht die Brüche, ohne daß sich ihr Werth ändert, so auszudrücken, daß sie gleiche Nenner erhalten; so heißt man dieses Brüche unter einerley Benennung bringen, oder dieselbe gleichnamig machen.

Dieses ist nothwendig, wenn Brüche addirt oder subtrahirt werden sollen, wie sich sogleich zeigen wird.

§. 34.

## §. 34.

## Aufgabe.

Brüche gleichnamig zu machen.

1) Wenn die Nenner nicht groß sind, und man ohne Mühe sieht, daß sie in einer gewissen Zahl alle aufgehen; so kann man diese zum gemeinschaftlichen Nenner machen, und die neuen Zähler dadurch erhalten, daß man die alten mit den Quotienten multiplicirt, welche entstehen, wenn der gemeinschaftliche Nenner mit den einzelnen Nennern dividirt wird. Z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$. Hier ist 8 der gemeinschaftliche Nenner. Die Quotienten sind $\frac{8}{2} = 4$, $\frac{8}{4} = 2$, $\frac{8}{8} = 1$, also die Brüche $\frac{1 \cdot 4}{8}$, $\frac{3 \cdot 2}{8}$, $\frac{5 \cdot 1}{8}$ oder $\frac{4}{8}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{5}{8}$.

Ferner $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$. Der gemeinschaftliche Nenner ist 60, weil darinn alle Nenner aufgehen. Die Quotienten sind $\frac{60}{2} = 30$, $\frac{60}{3} = 20$, $\frac{60}{4} = 15$, $\frac{60}{5} = 12$, $\frac{60}{6} = 10$, also sind die Zähler der Brüche, 30, 40, 45, 48, 50. Da die Zähler und Nenner mit einerley Zahl multiplicirt werden, so ändert sich der Werth der Brüche nicht, nachdem sie gleichnamig gemacht worden sind (§. 29.) Die Brüche sind also $\frac{30}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$, $\frac{50}{60}$.

2) Wenn zwey Brüche gleichnamig gemacht werden sollen, so verfährt man am kürzesten so, daß man jedes Bruchs Zähler und Nenner mit dem Nenner des andern Bruchs multiplicirt. Denn dadurch wird der Werth der Brüche nicht geändert,

dert, und die Nenner werden beyde aus dem Producte beyder Nenner bestehen. Z. B. $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$ | $\frac{28}{35}$, $\frac{30}{35}$.

3) Wenn mehr als zwey Brüche gleichnamig zu machen sind, so multiplicire man (wenn die Methode n. 1. nicht leicht anzuwenden ist) jedes Bruches Zähler und Nenner mit dem Producte aller übrigen Nenner. Die Brüche ändern sich nicht am Werthe, und doch bekommen sie einen gemeinschaftlichen Nenner, weil er ein Product aller einzelnen Nenner ist. Z. B. $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{8}$ | $\frac{80}{120}$, $\frac{96}{120}$, $\frac{45}{120}$.

Man sieht nun sogleich, welcher Bruch der größte ist.

## §. 35.

## Aufgabe.

Brüche zu addiren.

Man mache sie gleichnamig, wenn sie es nicht schon sind, und addire die Zähler. Die Summe giebt den Zähler zu dem gemeinschaftlichen Nenner. Bekömmt man einen unächten Bruch, so kann man durch Division des Zählers mit dem Nenner ihn leicht in einen gemischten verwandeln, und so erfahren, wie viele ganze Einheiten darinn enthalten sind. Wenn die Brüche des vorigen §. addirt werden sollen, so ist ihre Summe

$$\frac{80 + 96 + 45}{120} = \frac{221}{120} = 1\frac{101}{120}$$

Die Summe von $\frac{7}{8}$ und $\frac{3}{5}$ ist $\frac{35 + 24}{40} = \frac{59}{40} = 1\frac{19}{40}$.

Sollen

Sollen gemischte Brüche addirt werden, so addire man zuerst die ganzen Zahlen und hernach die Brüche, und setze die letzte Summe zu der erstern. Z. B.

$$\begin{array}{c} 4\frac{2}{5} \\ 6\frac{3}{4} \\ \hline 10\frac{23}{20} = 11\frac{3}{20} \end{array}$$

§. 36.

## Aufgabe.

Einen Bruch von einem andern zu subtrahiren.

Man mache sie gleichnamig, und ziehe den kleinern Zähler von dem größern ab. Der Rest giebt den Zähler zu dem gemeinschaftlichen Nenner. Z. B. $\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{12}{15} - \frac{10}{15} = \frac{2}{15}$.

Wenn ein Bruch von einer ganzen Zahl abgezogen werden soll, so verwandle man (nach §. 30.) die ganze Zahl in einen unächten Bruch von gleichem Nenner, und verfahre nun nach der so eben beschriebenen Methode. Z. B. $8 - \frac{2}{5} = \frac{40}{5} - \frac{2}{5} = \frac{38}{5} = 7\frac{3}{5}$. $10 - \frac{7}{9} = \frac{90}{9} - \frac{7}{9} = \frac{83}{9} = 9\frac{2}{9}$.

Wenn gemischte Brüche subtrahirt werden sollen, so richte man sie zuvor ein (nach §. 30.) und ziehe nun, nachdem man sie gleichnamig gemacht hat, den kleinern von dem größern ab. Z. B. $2\frac{7}{8} - 1\frac{4}{5} = \frac{23}{8} - \frac{9}{5} = \frac{115}{40} - \frac{72}{40} = \frac{43}{40} = 1\frac{3}{40}$. $6\frac{1}{2} - 3\frac{4}{7} = \frac{13}{2} - \frac{25}{7} = \frac{91}{14} - \frac{50}{14} = \frac{41}{14} = 2\frac{13}{14}$.

## §. 37.

### Aufgabe.

Brüche in genannten Zahlen zu addiren oder zu subtrahiren.

Man multiplicire den Bruch der größern Sorte mit der Zahl, welche anzeigt, wie viele Einheiten der geringern Sorte auf eine Einheit der größern gehen, wodurch die größere Sorten in geringere verwandelt werden, und darauf addirt oder subtrahirt werden können. Z. B. $\frac{3}{4}$ fl. + $\frac{4}{5}$ Rthlr. + 16 kr. = $\frac{3}{4}$. 60 kr. + $\frac{4}{5}$. 90 kr. + 16 kr. = 45 kr. + 72 kr. + 16 kr. = 133 kr.

Ferner $\frac{3}{5}$ fl. — 13 kr. = $\frac{3}{5}$. 60 — 13 = 36 — 13 = 23 kr.

Ferner $\frac{1}{2}$ Pfund — 5 Loth = $\frac{1}{2}$. 32 — 5 = 16 — 5 = 11 Loth.

## §. 38.

### Aufgabe.

Eine ganze Zahl mit einem Bruche zu multipliciren.

(Dieses ist eben so viel, als einen Bruch mit einer ganzen Zahl multipliciren; denn einerley Factoren geben immer dasselbe Product, z. B. 4. $\frac{2}{3}$ = $\frac{2}{3}$. 4.) Der Zähler des Bruchs wird mit der ganzen Zahl multiplicirt, z. B. 4. $\frac{2}{3}$ = $\frac{8}{3}$. Weil der Werth des Bruchs 4 mal größer werden soll, so muß der Zähler 4 mal vergrößert

ßert werden, ohne daß sich der Nenner ändert.

Wenn sich der Nenner mit der ganzen Zahl grade dividiren läßt, so kann man auch dieses thun, ohne den Zähler zu ändern. Denn auf diese Art wird der Werth des Bruchs ebenfalls so vielmal vergrößert, als die ganze Zahl Einheiten enthält. Wenn z. B. $\frac{5}{12}$ mit 4 multiplicirt werden soll, so erhält man $\frac{5}{12} : 4 = \frac{5}{3}$. Dieses ist gleich $\frac{5}{12} : 4 = \frac{20}{12}$. Man erhält also durch die Multiplication eines Bruchs mit einer ganzen Zahl, größer als 1, stets einen Bruch, der größer als der vorige ist.

## §. 39.

## Aufgabe.

Einen Bruch mit einem andern Bruche zu multipliciren.

Man multiplicire sowohl die beyden Zähler, als die beyden Nenner mit einander. Das erste Product giebt den neuen Zähler, das andere den neuen Nenner, z. B. $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{20}$.

Einen Bruch mit einem Bruche multipliciren, heißt von dem einen ein so großes Stück setzen, als der andere anzeigt. Daher wird der neue Bruch (das Product) kleiner werden, als jeder der beyden multiplicirten Brüche. Also ist diese Multiplication eigentlich keine Vermehrung (wie dieses bey ganzen Zahlen der Fall ist), sondern eine Verminderung. Z. B. $\frac{3}{4}$ von einem Gulden sind

45 kr.

45 kr. Wenn ich dieses mit $\frac{4}{5}$ multiplicire, so nehme ich den fünften Theil, 9 kr., viermal, dieses giebt 36 kr., welches $\frac{12}{20}$ von einem Gulden ist. Wenn ferner $\frac{3}{5}$ mit $\frac{2}{3}$ multiplicirt werden soll, so ist erstlich klar, daß wenn $\frac{3}{5}$ mit 2 multiplicirt wird, $\frac{6}{5}$ herauskömmt. Da aber $\frac{2}{3}$ dreymal kleiner ist als 2, so muß das Product $\frac{6}{5}$ dreymal kleiner gemacht werden. Dieses geschieht, indem der Nenner 5 mit 3 multiplicirt wird. Also $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{15}$.

Wenn mehr als 2 Brüche miteinander zu multipliciren sind, so werden die Producte aller Zähler und Nenner die neuen Zähler und Nenner. Z. B. $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{2}{7 \cdot 8} = \frac{2}{56} = \frac{1}{28}$.

Die gleichen Factoren im Zähler und Nenner werden gegeneinander weggestrichen. — Man kann, um dieses desto leichter zu thun, die Zahlen in ihre einfache Factoren zerfällen. Z. B.

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{15} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}{5 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{8}{25}.$$

## §. 40.

## Aufgabe.

Gemischte Brüche miteinander zu multipliciren.

Man richte die Brüche ein (oder verwandle sie in unächte Brüche, nach §. 30.), und verfahre nach der vorigen Regel. Z. B. $2\frac{1}{7} \cdot 3\frac{4}{5} = \frac{15}{7} \cdot \frac{19}{5} = \frac{285}{35}$; $7\frac{2}{3} \cdot 6\frac{3}{5} \cdot 3\frac{1}{3} = \frac{23}{3} \cdot \frac{33}{5} \cdot \frac{10}{3} = \frac{23 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{22 \cdot 23}{3} = \frac{506}{3}$.

§. 41.

## §. 41.

### Aufgabe.

**Einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu dividiren.**

(Der Divisor steht bey dieser und den folgenden Aufgaben stets zur rechten des Dividendi.) Man multiplicire mit der ganzen Zahl den Nenner, oder dividire damit den Zähler (wenn es ohne Rest geschehen kann). Z. B. $\frac{9}{10} : 3 = \frac{9}{30}$, eben so $\frac{9}{10} : 3 = \frac{3}{10}$. Man soll den Bruch in so viele gleiche Theile theilen, als die ganze Zahl (der Divisor) anzeigt, um zu erfahren, wie groß einer dieser Theile sey. Nun erhalte ich auf beyde Arten den 3ten Theil von $\frac{9}{10}$, nämlich $\frac{3}{10}$.

Durch die Division wird auch noch eine andere Frage beantwortet, nämlich wie vielmal der Divisor im Dividendo enthalten sey. Also wird sich bey der Division eines Bruches mit einer ganzen Zahl auch zeigen, wie groß das Stück der ganzen Zahl ist, welches im Bruche enthalten ist. Dieses zeigt der erhaltene Quotient an. Z. B. 3 steckt in 9 dreymal. Da aber $\frac{9}{10}$ zehnmal kleiner ist, als 9, so muß der Quotient auch 10mal kleiner als 3, also $\frac{3}{10}$ werden. $\frac{9}{10}$ von einem Gulden sind 54 kr.; 3 fl. sind 180 kr. Wie groß ist das Stück von 180, welches in 54 enthalten ist? Man dividire wirklich, so erhält man den Bruch

$$\frac{54}{180} = \frac{3 \cdot 18}{10 \cdot 18} = \frac{3}{10}.$$

## §. 42.

### Aufgabe.

Eine ganze Zahl durch einen Bruch zu dividiren.

Man kehre den Bruch um, und multiplicire damit die ganze Zahl (nach §. 38.) Z. B. $2 : \frac{2}{3} = 2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{2} = 3$. Da man wissen will, wie oft der Bruch in der ganzen Zahl enthalten ist, so würde es nicht hinreichend seyn, wenn man die letztere blos mit dem Zähler dividiren wollte ($2 : 2 = 1$;) denn $\frac{2}{3}$ ist so vielmal kleiner als 2, als der Nenner anzeigt, hier dreymal. Daher muß $\frac{2}{3}$ dreymal so oft in 2 stecken, als 2 Ganze. Aus diesem Grunde muß daher nach geschehener Division mit dem Zähler noch mit dem Nenner multiplicirt werden: es steckt $\frac{2}{3}$ in 2 nicht 1mal, sondern 3mal. Z. B. $\frac{2}{3}$ fl. = 40 kr. steckt in 2 fl. = 120 kr. dreymal. Ferner $6 : \frac{5}{8} = 6 \cdot \frac{8}{5} = \frac{48}{5}$. Denn wenn 6 mit 5 dividirt wird, so erhält man $\frac{6}{5}$. Da aber $\frac{5}{8}$ achtmal kleiner als 5 ist, so muß $\frac{5}{8}$ achtmal so oft in 6 stecken als 5. Also muß der Quotient $\frac{6}{5}$ achtmal vergrößert werden. Dieses geschieht, indem er mit 8 multiplicirt wird, $\frac{6}{5} \cdot 8 = \frac{48}{5}$.

## §. 43.

### Aufgabe.

Einen Bruch mit einem Bruche zu dividiren.

Man kehre auch hier den Divisor um, und multiplicire hernach die beyden Brü-

che

che (nach §. 39.) z. B. $\frac{8}{15} : \frac{2}{3} = \frac{8}{15} \cdot \frac{3}{2} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$. Denn wenn man fragt, wie oft 2 in $\frac{8}{15}$ stecke, so muß man $\frac{8}{15}$ mit 2 dividiren, $\frac{8}{15} : 2 = \frac{8}{30}$. Dieses ist aber dreymal zu klein, weil es nicht mit 2, sondern mit einer dreymal kleinern Zahl ($\frac{2}{3}$) sollte dividirt werden. Der Quotient $\frac{8}{30}$ muß daher noch dreymal vergrößert, das ist, der Zähler 8 muß noch mit 3 multiplicirt werden. Dieses giebt $\frac{24}{30} = \frac{4}{5}$. Z. B. $\frac{8}{15}$ von einem Gulden ist = 32 kr.; $\frac{2}{3}$ fl. = 40 kr. Das erstere durch's letztere dividirt, ist $= \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$. So viel steckt von 40 in 32, da der 5te Theil von 40 = 8, und dieser 4mal genommen = 32 ist.

Ueberhaupt wird durch die Division mit dem Zähler der Quotient um so viel zu klein, als der Nenner anzeigt; daher muß das Erhaltene noch mit dem Nenner multiplicirt werden.

Auch hier kann die Zerfällung in Factoren öfters vortheilhaft angewandt werden, z. B. $\frac{21}{25} : \frac{7}{15} = \frac{21}{25} \cdot \frac{15}{7} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{9}{5} = 1\frac{4}{5}$,

## §. 44.

### Aufgabe.

Gemischte Brüche zu dividiren.

Man

Man verwandle sie erst in unächte, und verfahre hernach nach der vorigen Regel. Z. B. $2\frac{3}{4} : 3\frac{4}{5} = \frac{11}{4} : \frac{19}{5} = \frac{11 \cdot 5}{4 \cdot 19} = \frac{55}{76}$.

Wenn sich Brüche finden, deren Zähler und Nenner selbst Brüche oder gemischte Zahlen sind; so ist dieses nichts anders als Division.

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

$$\frac{6\frac{3}{7}}{2\frac{1}{7}} = 6\frac{3}{7} : 2\frac{1}{7} = \frac{45}{7} : \frac{15}{7} =$$

$$\frac{45 \cdot 7}{15 \cdot 7} = \frac{45}{15} = 3.$$

---

# Von Decimalbrüchen.

## §. 45.

### Erklärung.

Decimalbrüche werden solche genannt, deren Zähler irgend eine ganze Zahl von einer oder mehrern Ziffern, und der Nenner entweder 10, oder 100, oder 1000 u. s. w. ist. Der Nenner muß immer 1 mit einer oder mehrern angehängten Nullen seyn. Z. B. $\frac{3}{10}$, $\frac{14}{100}$, $\frac{2}{1000}$, $\frac{27}{1000}$, sind Decimalbrüche.

Der Nutzen derselben ist in vielen Rechnungen mannichfaltig, da man jeden andern Bruch in einen gleichgeltenden Decimalbruch verwandeln, und damit leichter rechnen kann, wie sich bald zeigen wird. Sie werden daher auch in mathematischen Schriften öfters statt der gewöhnlichen Brüche gebraucht.

## §. 46.

### Aufgabe.

Eine ganze Zahl mit angehängtem Decimalbruche auf bequeme Art zu schreiben.

Man setze neben die ganze Zahl zur rechten ein Comma, welches das Decimalzeichen heißt, und dazu dient, die ganze Zahl von dem Bruche zu unterscheiden.

Neben

Neben dieses Zeichen zur Rechten setze man bloß den Zähler des Bruchs, wenn er so viele Ziffern, als der Nenner Nullen hat, z. B. $26\frac{3}{10} = 26,3$; $5\frac{12}{100} = 5,12$; $128\frac{172}{1000} = 128,172$. — Wenn aber der Nenner 1, 2, 3 u. s. w. Nullen mehr hat, als der Zähler Ziffern, so setze man zwischen das Decimalzeichen und den Zähler noch 1, 2, 3 u. s. w. Nullen. Z. B. $4\frac{6}{100} = 4,06$; $2\frac{8}{1000} = 2,008$; $14\frac{12}{1000} = 14,0012$.

Alle Ziffer zur rechten des Decimalzeichens (die Nullen mit dazu gerechnet, wenn welche da sind) heißen **Decimalstellen.** Jeder auf diese Art geschriebene Bruch hat so viele Decimalstellen, als Nullen der Nenner hat. Z. B. $4,025 = 4\frac{25}{1000}$.

Wenn nur ein Decimalbruch ohne vorhergehende ganze Zahl zu schreiben ist, so wird an die Stelle derselben vor das Decimalzeichen zur linken eine Nulle gesetzt. Z. B. $\frac{2}{10} = 0,2$; $\frac{6}{100} = 0,06$; $\frac{25}{100} = 0,25$; $\frac{26}{1000} = 0,026$; $\frac{1}{1000} = 0,001$.

## §. 47.

## Aufgabe.

Einen geschriebenen Decimalbruch auszusprechen.

Die Ziffer in der ersten Stelle nach dem Zeichen bedeutet Zehntel, in der 2ten Hundertel, in der 3ten Tausendtel u. s. w. Z. B. 5,267 sind 5 Ganze,

2 Zehntel, 6 Hundertel und 7 Tausendtel. Wo Nullen in Decimalstellen stehen, da fehlt der dahin gehörige Bruch, 4,002, vier Ganze und 2 Tausendtel; 0,1 ein Zehntel; 0,02, zwey Hundertel; 100,002, Hundert Ganze und 2 Tausendtel; 0,00012, ein Zehntausendtel und 2 Hunderttausendtel.

Der Grund von dieser Art, die Decimalbrüche zu schreiben und zu lesen, ist in dem §. 3. angeführten willkührlichen Satze zu suchen, daß jede Ziffer von ihrer Stelle ihren Werth bekömmt, und daß sie zehnmal weniger bedeutet, wenn sie um eine Stelle, 100mal weniger, wenn sie um 2 Stellen, 1000mal weniger, wenn sie um 3 Stellen weiter zur rechten rücket, u. s. w. Da nun bey ganzen Zahlen die Einer in der letzten Stelle zur rechten stehen, so müssen diejenigen Ziffern, welche in der ersten, zweyten, dritten ꝛc. Stelle zur rechten neben den Einern stehen, 10mal, 100mal, 1000mal weniger bedeuten, als ein Einer. Sie werden daher keine ganze Zahlen, sondern Brüche seyn, deren Nenner 10, 100, 1000 ꝛc. ist. Z. B. 7,777 ist 7 Ganze, und der zehnte Theil von 7 $= \frac{7}{10}$, ferner der zehnte Theil von $\frac{7}{10} = \frac{7}{100}$, ferner der zehnte Theil von $\frac{7}{100} = \frac{7}{1000}$. Also $7,777 = 7 + \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000}$. Eben so 0,248. Zwey bedeutet 10mal weniger als zwey Ganze, also $\frac{2}{10}$, 4 bedeutet 10mal weniger als $\frac{4}{10}$ (oder 100mal weniger als 4), also $\frac{4}{100}$, 8 bedeu-

bedeutet 10mal weniger als $\frac{8}{100}$ (oder 1000mal weniger, als 8), also $\frac{8}{1000}$. Daher ist $0,248 = \frac{2}{10} + \frac{4}{100} + \frac{8}{1000}$.

## §. 48.

### Folgesätze.

Die Decimalbrüche können leicht unter einerley Benennung gebracht werden, wenn man jedem Nenner so viele Nullen giebt, als der letzte zur rechten hat, und diesem gemäß auch den Zählern so viele Nullen anhängt, daß die Brüche sich im Werthe nicht ändern.

Z. B. $\frac{2}{10} + \frac{4}{100} + \frac{8}{1000} = \frac{200}{1000} + \frac{40}{1000} + \frac{8}{1000} = \frac{248}{1000} = 0,248$; $\frac{6}{100} + \frac{4}{10000} = \frac{604}{10000} = 0,0604$. Daher kann man die Decimalbrüche auf doppelte Art aussprechen, 1) entweder nach dem Werthe jeder einzelnen Ziffer (nach §. 47.), 2) oder nach dem Werthe der letzten Ziffer zur rechten, indem man sich die Brüche als unter einerley Benennung gebracht denkt. Z. B. 2,64 ist entweder 2 und $\frac{6}{10}$ und $\frac{4}{100}$ oder 2 und $\frac{64}{100}$. Im letzten Falle werden alle Ziffern in den Decimalstellen zusammen als der Zähler angesehen, und der Nenner ist 1 mit so viel angehängten Nullen, als überhaupt Decimalstellen vorhanden sind.

Noch einige Beyspiele. $42,52 = 42 + \frac{52}{100}$; $6,027 = 6 + \frac{27}{1000}$; $0,0027 = \frac{27}{10000}$; $1,000002 = 1 + \frac{2}{1000000}$.

Wenn

Wenn ganze Zahlen vor dem Zeichen stehen, so können diese entweder besonders (wie in den bisherigen Beyspielen), oder auch als unächte Decimalbrüche, die mit den angehängten ächten einerley Nenner haben, ausgesprochen werden. Z. B. 2,4 ist 2 und $\frac{4}{10}$. Da aber $2 = \frac{20}{10}$, so ist 2,4 auch $= \frac{20}{10} + \frac{4}{10} = \frac{24}{10}$; 16,24 $= 16 + \frac{24}{100}$ oder auch $= \frac{1600}{100} + \frac{24}{100} = \frac{1624}{100}$; $6{,}002 = 6 + \frac{2}{1000} = \frac{6000}{1000} + \frac{2}{1000} = \frac{6002}{1000}$; $1{,}00027 = 1 + \frac{27}{100000} = \frac{100000}{100000} + \frac{27}{100000} = \frac{100027}{100000}$.

Auf diese Art kann man eine ganze Zahl mit angehängtem Decimalbruche zusammen als eine Zahl ansehn, die der Zähler eines unächten Bruchs ist, dessen Nenner der zu den Decimalstellen gehörige Nenner bleibt (das ist, dessen Nenner 1 mit so viel angehängten Nullen ist, als Decimalstellen vorhanden sind.)

Man mag entweder einer ganzen Zahl nach dem, neben die Stelle der Einer gesetzten Decimalzeichen, oder einem Decimalbruche so viele Nullen anhängen, als man will, dadurch wird der Werth der ganzen Zahl oder des Bruchs nicht verändert. Z. B. 84 = 84, 0 = 84,00. Denn $84 = \frac{840}{10} = \frac{8400}{100}$ u. s. w. Ferner 0,36 = 0,360 = 0,3600. Denn $\frac{36}{100} = \frac{360}{1000} = \frac{3600}{10000}$ u. s. w. Ferner 7,2 = 7,20 = 7,200 = 7,2000, denn $\frac{72}{10} = \frac{720}{100} = \frac{7200}{1000} = \frac{72000}{10000}$ u. s. w.

§. 49.

## §. 49.

### Lehrsatz.

Wenn das Decimalzeichen von der linken zur rechten oder von der rechten zur linken um 1, 2, 3 2c. Stellen gerückt wird; so bekömmt die Zahl im ersten Falle einen zehnfach, hundertfach, tausendfach 2c. größern, im andern Falle einen zehnfach, hundertfach, tausendfach 2c. geringern Werth, als vorher. Denn der Nenner wird bey ungeändertem Zähler um so vielmal im ersten Falle vermindert, in dem zweiten vergrößert.

Z. B. $854{,}62 = \frac{85462}{100}$

$$8546{,}2 = \frac{85462}{10}$$

$$85462 = \frac{85462}{1}$$

Ferner $85{,}462 = \frac{85462}{1000}$

$$8{,}5462 = \frac{85462}{10000}$$

$$0{,}85462 = \frac{85462}{100000}$$

$$0{,}085452 = \frac{85462}{1000000}$$

Was zuerst 80 war, wird darauf 8, dann $\frac{8}{10}$, endlich $\frac{8}{100}$. Eben so wird aus 5 hernach $\frac{5}{10}$, dann $\frac{5}{100}$, zulezt $\frac{5}{1000}$ u. s. w.

## §. 50.

### Aufgabe.

Einen Decimalbruch mit einer Zahl, deren erste Ziffer 1 ist, mit einer oder mehrern angehängten Nullen (also mit 10, 100, 1000 u. dgl.) zu multipliciren oder zu dividiren.

Man rücke das Decimalzeichen um so viele Stellen zur rechten oder linken, als der Multiplicator oder Divisor Nullen hat. Z. B. 2, 24 . 10 = 22, 4; 0, 648 . 100 = 64, 8; 0, 0001 . 1000 = 0, 1; Ferner 826, 7 : 10 = 82, 67; 8435, 2 : 100 = 84, 352; 0, 6 : 1000 = 0, 0006; 2, 857 : 10000 = 0, 0002857.

Auch ganze Zahlen werden mit 10, 100, 1000 ꝛc. multiplicirt, indem 1, 2, 3 ꝛc. Nullen angehängt werden, welches eben so viel ist, als das Decimalzeichen (welches man sich dennoch neben der Stelle der Einer denken muß, wenn auch kein Decimalbruch angehängt ist) um 1, 2, 3 ꝛc. Stellen weiter von der linken zur rechten setzen. Z. B. 82 . 10 = 820; 425. 100 = 42500. Soll sie mit 10, 100, 1000 ꝛc. dividirt werden, so werden von der rechten zur linken 1, 2, 3 ꝛc. Ziffern durch das Decimalzeichen abgeschnitten. Z. B. $\frac{43}{10}$ = 4, 3; $\frac{628}{100}$ = 6, 28; $\frac{4}{1000}$ = 0, 004; $\frac{82}{10000}$ = 0, 0082.

## §. 51.

### Aufgabe.

Ganze Zahlen mit angehängten Decimalbrüchen, oder auch Decimalbrüche allein zu addiren oder zu subtrahiren.

Die Zahlen werden klassenmäßig geordnet, so, daß die Decimalzeichen in den zu addirenden oder zu subtrahirenden Zahlen untereinander zu stehen kommen. Nachher wird verfahren wie bey ganzen Zahlen.

Exempel zur Addition:

| | | |
|---|---|---|
| 24,85 | 0,352 | 36,478 |
| 0,637 | 42, | 27,521 |
| 904,04 | 8,07 | 74,967 |
| 882,743 | 1,118 | 21,034 |
| 10,101 | 51,54 | 160 |
| 1822,371 | | |

Exempel zur Subtraction:

| | | |
|---|---|---|
| 39,725 | 6,0030 | 1,1 |
| 14,538 | 1,4786 | 1,0001 |
| 25,187 | 4,5244 | 0,0999 |
| 4, | 3,8467 | 13,0007 |
| 2,3658 | 2,1 | 13, |
| 1,6342 | 1,7467 | 0,0007 |

## §. 52.

### Aufgabe.

Ganze Zahlen mit angehängten Decimalbrüchen, oder auch Decimalbrüche allein miteinander zu multipliciren.

Man

Man verfahre wie bey ganzen Zahlen, schneide aber im Producte so viele Decimalstellen ab, als in beyden Factoren zusammen abgeschnitten worden sind. Z. B.

$$4{,}2 = \tfrac{42}{10} \cdot \tfrac{42}{10} = \tfrac{1764}{100} = 17{,}64$$

$$\begin{array}{r} 4{,}2 \\ 4{,}2 \\ \hline 84 \\ 168\phantom{0} \\ \hline 17{,}64 \end{array}$$

Denn wenn Brüche miteinander multiplicirt werden, deren Nenner 1 mit einer oder mehrern angehängten Nullen sind; so wird das Product dieser Nenner jederzeit so viele Nullen erhalten, als die Factoren zusammen hätten. Noch einige Beyspiele.

$$\begin{array}{r} 6{,}287 \\ 45{,}32 \\ \hline 12574 \\ 18861\phantom{0} \\ 31435\phantom{00} \\ 25148\phantom{000} \\ \hline 284{,}92684 \end{array} \quad \text{denn } \frac{6287}{1000} \cdot \frac{4532}{100} = \frac{28492684}{100000}$$

$$\begin{array}{r} 1{,}03 \\ 2{,}4 \\ \hline 412 \\ 206\phantom{0} \\ \hline 2{,}472 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0{,}007 \\ 4 \\ \hline 0{,}028 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0{,}298 \\ 0{,}006 \\ \hline 0{,}001788 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0{,}0002 \\ 0{,}0002 \\ \hline 0{,}00000004 \end{array}$$

---

$$\begin{array}{r} 7{,}1 \\ 3{,}005 \\ \hline 355 \\ 21300 \\ \hline 21{,}3355 \end{array} \quad \begin{array}{r} 38{,}8 \\ 20{,}0006 \\ \hline 2328 \\ 7760000 \\ \hline 776{,}02328 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2{,}5002 \\ 0{,}301 \\ \hline 25002 \\ 750060 \\ \hline 0{,}7525602 \end{array}$$

§. 53.

## §. 53.

## Aufgabe.

Ganze Zahlen mit angehängten Decimalbrüchen, oder auch Decimalbrüche allein zu dividiren.

Hier müssen mehrere einzelne Fälle unterschieden werden.

1.) Wenn nur im Dividendo Decimalstellen befindlich sind, im Divisor aber nicht. Man rechne wie bey ganzen Zahlen, und schneide hernach im Quotienten eben so viele Decimalstellen ab, als im Dividendo waren. Z. B.

| | | |
|---|---|---|
| 12 | 14,4 | 1,2 |
| | 144 | |
| | 0 | |

Denn da $\frac{144}{12} = 12$, so muß 12 in 14,4 zehnmal weniger enthalten seyn, weil 14,4 zehnmal kleiner als 144 ist. Daher muß der Quotient zehnmal kleiner als 12 werden, nämlich 1, 2.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Eben so | 12 | 1,44 | 0,12 |
| | 12 | 0,144 | 0,012 |
| | 12 | 0,0144 | 0,0012 u. s. w. |

Ueberhaupt, so vielmal das Dividendum (bey ungeändertem Divisor) kleiner wird, so vielmal muß auch der Quotient kleiner werden.

2.) Wenn nur im Divisor Decimalstellen enthalten sind, und im Dividendo nicht. — Man rechne, wie bey ganzen Zahlen, und hänge hernach dem Quotien-

tienten so viele Nullen an, als der Divisor Decimalstellen hatte. Z. B.

| | | |
|---|---|---|
| 1,2 | 144 | 120 |

Denn weil 1, 2 zehnmal kleiner als 12 ist, so muß es zehnmal so oft in 144 stecken, also nicht 12 = sondern 120mal. Ist der Divisor 100 = oder 1000mal kleiner, so muß der Quotient durch Anhängen von 2, 3 rc. Nullen 100=, 1000= rc. fach vergrößert werden. Also

| | | |
|---|---|---|
| 0,12 | 144 | 1200 |
| 0,012 | 144 | 12000 |
| 0,0012 | 144 | 120000 |

Ueberhaupt, so vielmal der Divisor (bey ungeändertem Dividendo) kleiner wird, eben so vielmal muß der Quotient vergrößert werden.

3) Darnach läßt sich nun leicht bestimmen, was geschehen müsse, wenn sowohl der Divisor als das Dividendum Decimalstellen haben. Haben sie beyde gleich viele, so geschieht die Division wie bey ganzen Zahlen, und der Quotient wird nicht geändert. Denn bey Brüchen von gleichem Nenner werden nur die Zähler dividirt. Z. B. $\frac{2}{5}$ steckt in $\frac{4}{5}$ zweymal. Daher

| | | |
|---|---|---|
| 1,2 | 14,4 | 12 |
| 0,12 | 1,44 | 12 |
| 0,012 | 0,144 | 12 |

Hat das Dividendum mehr Decimalstellen, als der Divisor, so schneide man im Quotienten so viele Stellen ab, als der Ueberschuß beträgt. Z. B.

| | | |
|---|---|---|
| 1,2 | 1,44 | 1,2 |
| 0,12 | 0,144 | 1,2 |
| 1,2 | 0,144 | 0,12 |
| 1,2 | 0,0144 | 0,012 |

Hat der Divisor mehr Decimalstellen, als das Dividendum; so hänge man dem Quotienten so viele Nullen an, als der Ueberschuß beträgt; z. B.

| | | |
|---|---|---|
| 0,12 | 14,4 | 120 |
| 0,012 | 14,4 | 1200 |

Noch einige Beyspiele:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 45384 | : | 124 | = | 366 |
| 4538,4 | : | 124 | = | 36,6 |
| 453,84 | : | 124 | = | 3,66 |
| 45,384 | : | 124 | = | 0,366 |
| 0,45384 | : | 124 | = | 0,00366 |
| 45384 | : | 12,4 | = | 3660 |
| 45384 | : | 1,24 | = | 36600 |
| 45384 | : | 0,124 | = | 366000 |
| 45,384 | : | 12,4 | = | 3,66 |
| 4,5384 | : | 1,24 | = | 3,66 |
| 453,84 | : | 0,0124 | = | 36600 |
| 0,045384 | : | 0,124 | = | 0,366 |

## §. 54.

Bey jeder Division in ganzen Zahlen kann man, wenn ein Rest bleibt, den dem Quotienten angehängten Bruch (dessen Zähler der Rest, und Nenner der Divisor ist) auch durch einen gleichgeltenden Decimalbruch ausdrücken, so, daß der Quotient entweder ganze Zahlen und Decimalstellen, oder, wenn der Divisor größer als das Dividendum ist, blos Decimalstellen enthält.

Man

Man setzt im Dividendo neben die letzte Ziffer zur rechten ein Decimalzeichen, und hängt so viele Nullen an, als man will. Dadurch wird der Werth der Zahl nicht verändert (§. 48.); denn $42 = 42{,}0 = 42{,}00 = 42{,}000$ u. s. w. Setzet man nun die Division fort, so bekömmt der Quotient so viele Decimalstellen, als dem Dividendo Nullen angehängt worden sind. Z. B. $12 : 8 = 1\frac{1}{2}$

```
8 | 12,0 | 1,5 = 1½
     8
   ----
    40
   ----
     0
```

Geht die Rechnung vollkommen auf, wie im vorigen Beyspiele; so ist der Quotient vollständig gefunden. In diesem Falle ist es öfters nöthig, 2, 3, 4 &c. Nullen anzuhängen, bis die Rechnung aufgeht. Z. B. $25 : 8 = 3\frac{1}{8}$. Ferner $26 : 8 = 3\frac{1}{4}$.

```
8 | 25,000 | 3,125 = 3⅛.     8 | 26,00 | 3,25 = 3¼.
  | 24                         | 24
  -----                        -----
    10                            20
     8                            16
  -----                        -----
    20                            40
    16                            40
  -----                        -----
    40                             0
    40
  -----
     0
```

Geht die Rechnung nicht auf, man mag so viele Nullen anhängen, als man will; so findet man den Quotienten nicht ganz voll-

vollständig. Man kann sich aber doch dem wahren Werthe desselben so viel nähern, als man nöthig findet. Die Kleinigkeit, welche alsdann noch fehlt, kann ausser Acht gelassen werden. Oefters sind 2 oder 3 Nullen hinlänglich, wenn keine größere Genauigkeit erforderlich ist. Z. B.

$22 : 7 = 3\frac{1}{7}$. 7 | 22,000 | 3,142 ....<br>
| 21 ist beynahe $= 3\frac{1}{7}$.<br>
10<br>
7<br>
30<br>
28<br>
20<br>
14

Was hier noch fehlt, ist weniger als $\frac{1}{1000}$.

$65 : 9 = 7\frac{2}{9}$. 9 | 65,0000 | 7,2222 ....<br>
20 Das Fehlende<br>
20 ist weniger als<br>
20 $\frac{1}{10000}$<br>
20<br>
18

Ist der Divisor größer, als das Dividendum, also der Quotient ein ächter Bruch (z. B. $1 : 8 = \frac{1}{8}$); so kann man ihn auf diese Art auch in einen Decimalbruch verwandeln, wenn man dem Zähler (oder dem Dividendum) einige Nullen anhängt. Auch hier wird der gewöhn-

liche

liche Bruch entweder ganz vollständig, oder beynahe vollständig durch den Decimalbruch ausgedrückt.

```
8 | 1,000 | 0,125 = 1/8.     2 | 1,0 | 0,5 = 1/2.
  |   8   |                    | 1 0 |
  ---------                    -------
      20                          0
      16
      --
       40
       40
       --
        0

3 |2,00| 0,66 ...          9 |7,000| 0,777 ....
  | 18 |       ist           |63   |        ist
  ------                     -------
     20 beynahe = 2/3.          70 beynahe = 7/9.
     18                         --
     --                         70
      2
```

Auf diese Art findet man $\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{1}{3} = 0,333 \ldots$; $\frac{2}{3} = 0,666 \ldots$; $\frac{1}{4} = 0,25$; $\frac{3}{4} = 0,75$; $\frac{1}{5} = 0,2$; $\frac{4}{5} = 0,8$; $\frac{1}{6} = 0,166 \ldots.$; $\frac{5}{6} = 0,8333 \ldots.$; $\frac{1}{7} = 0,1428 \ldots$; $\frac{1}{8} = 0,125$; $\frac{1}{9} = 0,1111 \ldots$; $\frac{2}{9} = 0,222 \ldots.$; $\frac{1}{10} = 0,1$; $\frac{1}{11} = 0,0909 \ldots.$ u. s. w.

## §. 55.

Die Vortheile, welche die Rechnung mit Decimalbrüchen gewährt, sind von mancherley Art. Man erspart dadurch öfters Mühe und Zeit, welche verwickelte Rechnungen mit gewöhnlichen Brüchen erfordern. Besonders

ist

ist dieses wichtig für den, der in der Arithmetik, Geometrie und andern Theilen der Mathematik weiter gehen will. Einige Beyspiele davon werden sich noch in den folgenden Abschnitten geben lassen. Hier wollen wir nur noch Folgendes zur Empfehlung dieser Rechnung beyfügen.

Die Decimalbrüche sind sogleich unter einerley Benennung gebracht, wenn man ihnen gleich viele Decimalstellen giebt. Alsdann können sie wie ganze Zahlen addirt oder subtrahirt werden.

Sollten z. B. $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{9}$ addirt werden, so setze man

| | |
|---|---|
| $\frac{1}{8} = 0{,}125$ | Wenn $\frac{2}{3}$ von $\frac{7}{9}$ abgezogen werden |
| $\frac{2}{3} = 0{,}666$ | $\frac{7}{9} = 0{,}777$ soll |
| $\frac{7}{9} = 0777$ | $\frac{2}{3} = 0666$ |
| 1,568 | 0,111 |

Noch mehr fällt dieser Vortheil, der durch Ersparung der Mühe bey der Arbeit, Brüche gleichnamig zu machen, erhalten wird, in die Augen, wenn die Zähler und Nenner große Zahlen und Primzahlen unter sich sind. Es sollen zum Beyspiel die Brüche $\frac{17}{23}$, $\frac{59}{97}$, $\frac{85}{117}$, $\frac{193}{211}$ addirt werden. Man verwandle sie in Decimalbrüche.

$\frac{17}{23} = 0,7391$
$\frac{59}{97} = 0,6082$
$\frac{85}{117} = 0,7265$
$\frac{193}{211} = 0,9147$

$2,9885$

Man kann ferner die verschiedene Größe der Decimalbrüche leichter schätzen, als anderer Brüche. In dem angeführten Beyspiele sieht man auf den ersten Blick, daß der vierte Bruch der größte, und der zweyte der kleinste unter diesen vieren ist.

Gemischte Brüche muß man erst einrichten, wenn man mit ihnen rechnen will. Dieses ist bey Decimalbrüchen nicht nöthig, weil sie schon einerley Nenner haben. Man soll $15\frac{3}{8}$ von $23\frac{2}{5}$ abziehen.

$23\frac{2}{5} = 23,400$
$15\frac{3}{8} = 15,375$

$8,025$

Es sollen addirt werden $26\frac{9}{20}$, $31\frac{7}{8}$, $212\frac{4}{7}$

$26\frac{9}{20} = 26,450$
$31\frac{7}{8} = 31,815$
$212\frac{4}{7} = 212,571$

$270,896$

Es soll $16\frac{4}{9}$ mit $21\frac{11}{50}$ multiplicirt werden

$$16\tfrac{4}{9} = 16,444$$
$$21\tfrac{11}{50} = 21,220$$

```
     328880
    32888
   16444
  32888
 ----------
 348,941680
```

Das Product ist ein wenig zu klein, weil bey der Multiplication solcher Brüche, wie 16,444 . . . . . (die nicht genau gefunden werden können, und deren fehlende Ziffern durch einige Punkte angedeutet werden,) die letzten Ziffern des Products unrichtig werden. Hier müßte es also eigentlich heißen 348,95 . . . . .

# Dritter Abschnitt.

## Von der Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel.

§. 56.

### Erklärung.

Wenn man eine Zahl mit sich selbst multiplicirt, so heißt das Product das **Quadrat** oder die **Quadratzahl** derselben.

Z. B. 144 ist das Quadrat von 12. Denn 12. 12 = 144. Die Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt wird, heißt die **Quadratwurzel**. Also ist 12 die Q. Wurzel von 144.

Folgendes ist ein **Wurzeltäflein** der Einer mit ihren Quadraten:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. |
| 1. | 4. | 9. | 16. | 25. | 36. | 49. | 64. | 81. |

Wenn man ein Quadrat nochmals mit seiner Wurzel multiplicirt, so entsteht ein Product, welches der **Cubus** oder die **Cubikzahl** von der Zahl heißt, die dreymal als Factor darinn enthalten ist, und dieser Factor selbst heißt die **Cubikwurzel**.

Z. B.

Z. B. 12. 144 = 12. 12. 12 = 1728. Hier ist 12 die C. Wurzel von 1728, und diese letztere ist die Cubikzahl von 12. (Woher die Benennungen Quadrat und Cubikzahl kommen, wird in der Geometrie weiter erklärt.) Die Cubikzahlen der Einer sind folgende:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. |
| 1. | 8. | 27. | 64. | 125. | 216. | 343. | 512. | 729. |

Man nennt das Quadrat auch die 2te Potenz, den Cubus die dritte Potenz der Wurzel. Man kann neben die Wurzel zur rechten oben eine kleine 2 oder 3 setzen, um anzuzeigen, daß diese Wurzel zur 2ten oder 3ten Potenz erhoben werden soll.

Z. B. $4^2 = 16$; $8^2 = 64$; $5^3 = 125$; $9^3 = 729$.

Höhere Potenzen sind, wenn die Wurzel 4, 5 rc. mal als Factor im Producte steckt; z. B. $2^4 = 16 = 2.\ 2.\ 2.\ 2$, ist die 4te Potenz von 2. Ferner $3^5 = 243 = 3.\ 3.\ 3.\ 3.\ 3.$ ist die fünfte Potenz von 3.

§. 57.

## Erklärung.

Wenn eine Quadrat- oder Cubikzahl bekannt ist, so kann man finden, was sie für eine Wurzel hat. Dieses heißt das Ausziehen der Wurzeln.

Man muß nämlich suchen, welche Zahl, ein- oder zweymal mit sich selbst multiplicirt, die Quadrat- oder Cubikzahl

zahl giebt. Das Zeichen der Quadratwurzel ist $\sqrt{}$, der Cubikwurzel $\sqrt[3]{}$. Z. B. $\sqrt{144} = 12$; $\sqrt[3]{64} = 8$; $\sqrt[3]{8} = 2$; $\sqrt[3]{1000} = 10$.

Man kann auch aus höheren Potenzen die Wurzeln ziehen. In den Anfangsgründen der Rechenkunst beschäftigt man sich aber nur mit den Regeln, wie man Quadrat- und Cubikwurzeln ausziehen kann, welches in manchen mathematischen Rechnungen großen Nutzen hat. Die Wurzeln, welche nur aus einer Ziffer bestehen, können aus obigem Täflein gefunden werden. Wenn eine Wurzel aus 2, 3 ꝛc. Ziffern besteht, so heißt sie eine zweytheilige, dreytheilige ꝛc. Wurzel.

§. 58.

Lehrsatz.

Das Quadrat einer zweytheiligen Wurzel besteht aus drey Theilen,

1) dem Quadrate des ersten Theils der Wurzel,

2) dem doppelten Producte aus dem ersten in den zweyten Theil,

3) dem Quadrate des zweyten Theils der Wurzel.

Man nenne überhaupt den ersten Theil a, den zweyten b, (welche Zahlen vorstellen können, die man nur will). Also ist $a + b$ die Quadratwurzel. Man multiplicire diese mit sich selbst.

$a + b$

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline + a.b + b.b \\ a.a + a.b \qquad \\ \hline a^2 + 2a.b + b^2. \end{array}$$

Es sey nun a = 30, b = 5, so ist a + b = 35.

| | | |
|---|---|---|
| 35 | 30 + 5 | |
| 35 | 30 + 5 | |
| 175 | 25 = | Quadr. des 2. Theils. |
| 105 | 150) = | zwiefaches Product des |
| 1225 | 150) | ersten in den 2ten Theil. |
| | 900 = | Quadrat des 1. Theils. |
| | 1225 = | Quadrat von 35. |

Anderes Beyspiel. Man suche das Quadrat von 96. Hier ist 90 der erste und 6 der zweyte Theil.

| | | |
|---|---|---|
| 96 | 90 + 6 | |
| 96 | 90 + 6 | |
| 576 | 36 = | Quadr. des 2. Theils. |
| 864 | 540) = | zwiefaches Product |
| 9216 | 540) | des 1. in den 2. Theil. |
| | 8100 = | Quadr. des 1. Theils. |
| | 9216 = | Quadrat von 96. |

Also ist $96^2 = 9216$.

§. 59.

§. 59.

## Lehrsatz.

Das Quadrat einer Wurzel hat entweder doppelt so viele Ziffern, als die Wurzel, oder eine weniger, als dieses doppelte.

Denn die Quadrate der Zahlen von 1 bis 9 haben 2 oder eine Ziffer (§. 56). Die Quadrate der Zahlen von 10 bis 99 haben 4 oder 3 Ziffern, weil $10^2 = 100$, und $99^2 = 9801$. Die Quadrate der Zahlen von 100 bis 999 haben 6 oder 5 Ziffern. Denn $100^2 = 10000$, und $999^2 = 998001$ u. s. w.

Umgekehrt hat also die Wurzel einer Quadratzahl
von 1 oder 2 Ziffern, eine Ziffer,
von 3 oder 4 Ziffern, zwey Ziffer,
von 5 oder 6 Ziffern, drey Ziffer
u. s. w.

§. 60.

## Aufgabe.

Eine zweytheilige Quadratwurzel aus einer Zahl von 3 oder 4 Ziffern zu ziehen, z. B. aus 1225.

Man theile die Zahl von der rechten zur linken in Classen von 2 Ziffern. Die erste Classe zur linken kann auch nur eine Ziffer haben. In den Ziffern dieser ersten Classe muß das Quadrat des ersten Theils der Wurzel enthalten seyn, weil dieser ein Zehner ist. Man sehe daher in obigem Wurzeltäflein nach, ob es entweder ein Quadrat giebt, welches der

ersten Classe gleich ist, oder wenn dieses nicht wäre, welches das dieser Classe am nächsten kommende kleinere Quadrat ist; dieses setze man darunter und ziehe es ab. Das abzuziehende Quadrat ist hier 9, und der erste Theil der Wurzel 3. (Eigentlich ist er ein Zehner, nämlich 30, und sein Quadrat ist 900; man kann aber hier und in der Folge solche Zahlen als Einer betrachten, weil sie doch ihren Werth von ihrer Stelle erhalten.) 9 von 12 abgezogen giebt 3 zum Reste, dazu schreibe man die folgende Ziffer des Quadrats, giebt 32 (eigentlich 320). Hierinn muß das doppelte Product des ersten Theils der Wurzel, multiplicirt mit dem 2ten, enthalten seyn, weil das Product eines Einers in einen Zehner 2 oder 3 Ziffern, wovon die letzte ein 0 ist, enthält. (Z. B. $2 \cdot 10 = 20$, $4 \cdot 40 = 160$, $7 \cdot 90 = 630$, u. s. w.) Wenn man aber von einem Producte den einen Factor weiß, und den andern nicht; so darf man dasselbe nur mit dem bekannten Factor dividiren, um den unbekannten zu finden (§. 16). Dieses ist hier der Fall. Wenn man mit dem doppelten 1sten Theile $= 6$ in 32 dividirt, so erhält man den 2ten Theil $= 5$. Die ganze Wurzel ist $= 35$. Um zu erfahren, ob diese Zahl 5 nicht zu groß genommen sey, ziehe man 1.) das doppelte Product des 1sten Theils in den 2ten, $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ von 32 ab, bleibt 2, setze dazu die letzte Ziffer der Quadratzahl, 5, und ziehe 2.) von diesen 25 das Quadrat des 2ten Theils (welches hier auch 25 ist) ab, weil dieses Quadrat des Einers in den

letzten

letzten beyden Ziffern enthalten seyn muß. Es bleibt nichts zum Reste. Also ist die Wurzel genau gefunden. Geht die Rechnung auf, wie hier, oder bleibt ein Rest; so ist die Ziffer für den 2ten Theil der Wurzel nicht zu groß angenommen: würde aber ihr Quadrat sich nicht abziehen lassen, so müßte die nächst kleinere Zahl als 2ter Theil der Wurzel angenommen werden. (Was mit einem bleibenden Reste zu machen sey, soll hernach gezeigt werden.)

12 | 25 || $30 = a$ Auf kürzere Art

$5 = b$

$a^2 = 900$ $35 = a + b.$ 12 | 25 || 35

$2a = 60)$ 325    9 |

$2a.\,b = 300$ Probe 35    6) 32

25    35    30

$b^2 = 25$    175    25

0    105    25

1225    0

Man will die Quadratwurzel von 5476 wissen

54 | 76 || 74    Probe

49 |    $70 + 4$

14) 57    $70 + 4$

56    16

16    280

16    280

0    4900

5476

In den beyden ersten Ziffern 54 steckt $7 \cdot 7 = 49$. In den drey ersten Ziffern steckt auch ~~noch~~ $2 \cdot 7 \cdot 4 = 56$. In dem übrigen

ganzen

ganzen Reste steckt noch 4·4 = 16. Diese Theile müssen nach und nach von der Quadratzahl abgezogen werden.

## §. 61.

## Aufgabe.

Aus einer Zahl von drey oder mehrern Classen eine drey- und mehrtheilige Wurzel zu ziehen.

Wenn sie in Classen getheilt ist, so hat die Wurzel jedesmal so viele Ziffern, als Classen vorhanden sind (§. 59.) Daher findet man nach den vorigen Regeln die Wurzel. Hat sie z. B. 3 Ziffern, so suche man Anfangs die erste und zweyte Ziffer, darauf sehe man beyde zusammen als den 1ten Theil der Wurzel an, und suche nun die 3te Ziffer als den 2ten Theil. Eben so fahre man fort, wenn noch mehrere Ziffern zu suchen sind. Z. B.

2 | 95 | 84 || 172
1 |
———
2) 19
14
———
55
49
———
34) 68
68
———
4
4
———
0

100 + 70
100 + 70
———
4900 }
7000 } Theile des
7000 } Quadrats
10000 } von 170.
———
28900

Ferner 170 + 2
170 + 2
———
4 }
340 } Theile des
340 } Quadrats
28900 } von 172.
———
29584

Ferner

Ferner ist $\sqrt{14953689} = 3867$

| | |
|---|---|
| 14 \| 95 \| 36 \| 89 \|\| 3867 | 3000 + 800 |
| 9 | 3000 + 800 |
| 6) 59 | 640000 |
| 48 | 2400000 |
| 115 | 2400000 |
| 64 | 9000000 |
| 76) 513 | 14440000 |
| 456 | 3800 + 60 |
| 576 | 3800 + 60 |
| 36 | 3600 |
| 772) 5408 | 228000 |
| 5404 | 228000 |
| 49 | 14440000 |
| 49 | 14899600 |
| 0 | 3860 + 7 |
| | 3860 + 7 |
| | 49 |
| | 27020 |
| | 27020 |
| | 14899600 |
| | 14953689 |

## §. 62.

### Lehrsatz.

Das Quadrat eines Bruchs ist wieder ein Bruch, dessen Zähler und Nenner die Quadrate des Zählers und Nenners der Wurzel sind.

Dieses folgt aus §. 39. von der Multiplication eines Bruchs mit einem andern. Z. B. $(\frac{2}{5})^2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$; $(\frac{3}{7})^2 = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$. Wenn man daher aus einem

einem Bruche die Quadratwurzel ziehen soll, so muß man sie aus dem Zähler und Nenner ziehen, und die erstere zum Zähler, die letztere zum Nenner der Wurzel machen, z. B. $\sqrt{\frac{49}{100}} = \frac{7}{10}$. Da nun das Quadrat einer ganzen Zahl immer eine ganze Zahl ist, so folgt, daß die Wurzel eines eigentlichen Bruchs niemals eine ganze Zahl, sondern wieder ein Bruch ist, und daß die Wurzel einer ganzen Zahl niemals genau durch einen Bruch dargestellt werden kann. Wenn daher bey dem Ausziehen der Wurzel noch ein Rest bleibt, so ist die Wurzel keine völlige ganze Zahl, sondern liegt zwischen 2 ganzen Zahlen. Z. B. $\sqrt{5}$ ist mehr als 2 und weniger als 3, weil $2 . 2 = 4$, $3 . 3 = 9$. Da man aber auch durch keinen Bruch eine solche Wurzel vollständig angeben kann, so läßt sie sich durch Zahlen gar nicht vollständig darstellen.

## §. 63.

## Erklärung.

Es giebt viele Zahlen, aus denen man die Quadratwurzel nicht völlig genau finden kann; z. B. $\sqrt{5}$. Diese ist 2, und bleibt noch ein Rest. Solche Wurzeln heißen Irrationalzahlen. Man kann sich aber doch dem wahren Werthe, so viel man will, nähern, indem man das, was als Rest bleibt, in Decimalbrüchen ausdrückt.

§. 64.

## §. 64.

### Aufgabe.

Wie findet man irrationale Wurzeln in Decimaltheilen?

Man hänge dem Reste 2 oder 4 oder 6 Nullen an (überhaupt so viele Paare Nullen, als man Decimalstellen von der Wurzel finden will), und setze die Rechnung nach den vorigen Regeln fort. Z. B. $\sqrt{38} = 6,16\ldots\ldots$

```
     38 || 6, 16 . . . . . = beynahe 616/100
     36
    ----
 12) 20
     12
    ----
      80
       1
    -----
122) 790
     732
    -----
      580
       36
    -----
      544
```

Was hier noch fehlt, ist weniger als $\frac{1}{100}$ von der Einheit. Man könnte aber noch so viele Decimalstellen, als man wollte, weiter suchen.

Aus §. 48. ist klar, daß der Werth einer ganzen Zahl nicht verändert wird, wenn man nach dem Einer ein Decimalzeichen und darauf so viele Nullen setzt, als man will; so ist hier $38 = 38,00 = \frac{3800}{100} = 38,0000 = \frac{380000}{10000}$. Da ferner die Wurzel eines Bruchs entsteht, indem man die Wurzel aus dem Zähler und Nenner zieht; so muß man eine gerade Zahl von Nullen anhängen, damit der Nenner 100 oder 10000 oder 1000000 ꝛc. werde, weil sich die Wurzel, 10, 100, 1000 ꝛc. aus solchen Zahlen genau finden läßt.

Durch

Durch die Rechnung findet man den zu einem solchen Nenner gehörigen Zähler, in Decimalstellen, obgleich immer ein Rest bleibt, und daher die Wurzel nie vollständig gefunden wird (§. 62). Oefters kann aber die Rechnung schon abgebrochen werden, nachdem 2 oder 3 Decimalstellen gefunden worden sind, weil dieses für die Ausübung hinreichend ist. Noch einige Beyspiele.

$\sqrt{40}$ ist beynahe = 6,32, $\sqrt{5}$ = beynahe 2,23.

```
      40 | 00 | 00 || 6 , 32 ...
      36
     ----
 12)  40          5 | 00 | 00 || 2,23 ...
      36          4
     ----        ----
      40      4)  10
       9           8
     ----        ----
126) 310          20
     252           4
     ----        ----
      580    44) 160
        4        132
     ----        ----
      576        280
                   9
                 ----
                 271
```

## §. 65.

## Folgesatz.

Um die Quadratwurzel aus einem gewöhnlichen Bruche zu ziehen, hat man nicht grade nöthig, die Wurzel besonders aus dem Zähler und Nenner zu ziehen, sondern man kann den Bruch in einen Decimalbruch verwandeln (§. 54.), so, daß die Zahl der Decimalstellen grade wird, damit der Nenner ein vollkommnes Quadrat wird (§. 64.) und darauf die Wur-

zel

zel nach denselben Regeln, wie bey ganzen Zahlen ausziehen.

Auch hier wird die Rechnung nicht immer grade aufgehen, wo alsdann das gilt, was vorhin von Irrationalgrößen gesagt worden ist.

$\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} = \sqrt{0,36} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

```
   36 | 6
   36 |
  ------
    0
```

$\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{10}} = \sqrt{0,500000}$

```
          50 | 00 | 00 || 0,706 . . . .
        -----
  14)    100
        -----
 140)   1000
         840
        -----
        1600
          36
        -----
        1564
```

$\sqrt{\frac{11}{16}} = \sqrt{0,6875}$

```
           68 | 75 || 0,829
           64 |
         ------
   16)     47
           32
         ------
          155
            4
         ------
  164)   1510
         1476
         ------
           340
            81
         ------
           259
```

√

$$\sqrt{\tfrac{17}{20}} = \sqrt{\tfrac{85}{100}} = \sqrt{0,850000}$$

```
        85 | 00 | 00 | 00 || 0,921
        81 |
  18)   40
        36
        ---
        40
         4
        ---
 184)   360
        184
        ----
        1760
           1
        ----
1842)  17590
       16578
       -----
       10120
          81
       -----
       10039
```

## §. 66.

### Lehrsatz.

Der Cubus einer zweytheiligen Wurzel besteht aus folgenden vier Theilen:

1) dem Cubus des 1ten Theils der Wurzel,

2) dem dreyfachen Producte aus dem Quadrate des 1ten Theils in den 2ten,

3) dem dreyfachen Producte aus dem 1ten Theile in das Quadrat des 2ten,

4) dem Cubus des 2ten Theils.

Im §. 58. fanden wir das Quadrat von $a+b$. Dieses multiplicire man noch einmal mit $a+b$.

$$
\begin{array}{rl}
(a + b)^2 = & a^2 + 2a.b + b^2 \\
 & a + b. \\
\hline
 & + a^2 b + 2a.b^2 + b^3 \\
 & + a^3 + 2a^2 b + a.b^2 \\
\hline
 & a^3 + 3a^2 b + 3a.b^2 + b^3
\end{array}
$$

Es sey z. B. $a = 20$, $b = 4$, so ist der Cubus $= 20^3 + 3.20.^2 4 + 3.20.4^2 + 4^3$

$$
\begin{array}{rr}
20^3 = & 8000 \\
3.20.^2 4 = & 4800 \\
3.20.4^2 = & 960 \\
4^3 = & 64 \\
\hline
 & 13824
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
24 \\
24 \\
\hline
96 \\
48 \\
\hline
576 \\
24 \\
\hline
2304 \\
1152 \\
\hline
13824
\end{array}
$$

## §. 67.

### Lehrsatz.

Jede Cubikzahl hat nicht mehr als dreymal so viel, und nicht weniger als dreymal so viel Ziffern weniger zwey, als ihre Wurzel.

Denn die Cubi der Zahlen von 1 bis 9 haben 1 oder 2 oder 3 Ziffern, weil 1. 1. 1 = 1, und 9. 9. 9 = 729. Die Cubi der Zahlen von 10 bis 99 haben 4 oder 5 oder 6 Ziffern. Denn $10^3 = 1000$, und $100^3 = 1000000$, die kleinste Zahl von 7 Ziffern, also hat $99^3$ nur 6 Ziffern. Die Cubi der Zahlen von 100 bis 999 haben entweder

weder 7 oder 8 oder 9 Ziffern, da $100^3 = 1000000$, und $1000^3 = 1000000000$, die kleinste Zahl von 10 Ziffern, also hat $999^3$ nur 9 Ziffern u. s. w.

Daraus folgt umgekehrt, daß die

Cubikwurzel einer Zahl von 1 oder 2 oder 3 Ziffern, 1 Ziffer hat. — 4 — 5 — 6
— 2 — — — 7 — 8 — 9
— 3 — — — 10 — 11 — 12
— 4 — — u. s. w.

## §. 68.

### Aufgabe.

**Eine zweytheilige Cubikwurzel aus einer Zahl von 4 oder 5 oder 6 Ziffern zu ziehen, z. B. aus 13824.**

Man theile die Zahl von der rechten zur linken in Classen von 3 Ziffern. (Die erste Classe zur linken kann auch nur 2 oder eine Ziffer enthalten.) In den Ziffern dieser ersten Classe muß der Cubus des ersten Theils der Wurzel enthalten seyn, weil er ein Zehner ist, und daher aus einer oder zwey oder drey Zahlen, mit drey angehängten Nullen besteht (z. B. $20 . 20 . 20 = 8000$, $60 . 60 . 60 = 216000$ u. s. w.) Man sehe daher in dem Wurzeltäflein §. 56. nach, ob es entweder eine Cubikzahl giebt, welche der ersten Classe gleich ist, oder wenn dieses nicht wäre, welche die dieser Classe am nächsten kommende kleinere Cubikzahl ist. Diese setze man darunter, und ziehe sie ab. Die abzuziehende Cubikzahl ist hier 8, und der erste Theil der Wurzel ist 2 (eigentlich ist

er 20, und sein Cubus 8000). Wenn 8 von den Ziffern der ersten Classe 13 abgezogen wird, so bleiben 5. Dazu schreibe man die folgende Ziffer 8, giebt 58 (eigentlich 5800). Hierinn muß das Product enthalten seyn, welches entsteht, wenn man das dreyfache Quadrat des ersten Theils der Wurzel mit dem zweyten Theile multiplicirt, (denn das Quadrat eines Zehners hat hinten 2 Nullen). Man dividire also 58 mit dem dreyfachen Quadrate von 2, das ist, mit 12; so erhält man den zweyten Theil = 4. Die ganze Wurzel ist 24. Um zu erfahren, ob diese Zahl 4 nicht zu groß genommen sey, ziehe man 1) das Product von 4 in 12 = 48 von 58 ab, bleibt 10, und setze dazu folgende Ziffer 2, giebt 102 (eigentlich 1020). Darinn muß das Product aus dem dreyfachen Quadrate des zweyten Theils in den ersten stecken, (welches am Ende eine Nulle hat). Es ist $3. 4^2. 2 = 96$. Nun ziehe man 2) diese 96 von 102 ab, giebt 6. Dazu setze man die letzte Ziffer 4, in diesen 64 muß noch der Cubus des 2ten Theils der Wurzel enthalten seyn, wenn er nicht zu groß angenommen worden ist. Also ziehe man 3) diesen ab, welcher auch 64 = 4. 4. 4. ist. Es bleibt nichts zum Reste; also ist die Wurzel genau gefunden. Die Probe macht man, indem man die Zahl 24 in die dritte Potenz erhebt, welches wieder 13824 geben muß. Wäre ein Rest geblieben, so müßte derselbe bey der Probe noch zu dem Cubus der Wurzel addirt werden, um die Zahl vollständig zu finden, aus der die Wurzel gezogen worden ist.

13

13 | 824 || 20 = a    Auf kürzere Art.

$a^3 = 8\ 000 \quad 4 = b$

$3a^2 = 1200)5\ 824 \quad 24 = a + b$    13 | 824 || 24

$3a^2 . b = 4\ 800$    8

1 024    12|58

$3ab^2 = 960$    48

64    102

$b^3 = 64$    96

0    64

64

0

Probe
24
24
96
48
576
24
2304
1152
13824

Anderes Beispiel. Man will die Cubikwurzel von 46656 wissen.

46 | 656 || 36    Probe

$a^3 = 27$    36

$3a^2 = 27)\ 196$    36

$3a^2 b = 162$    216

345    108

$3a . b^2 = 324$    1296

216    36

$b^3 = 216$    7776

0    3888

46656

Probe auf andere Art.

$$30 + 6 = a + b$$
$$30 + 6 = a + b$$
$$30^2 + 2.6.30 + 6^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$30 + 6 = \quad a + b$$
$$+ 1.30^2.6 + 2.6^2 30 + 6^3$$
$$30^3 + 2.30^2.6 + 1.6^2.30$$
$$30^3 + 3.30^2 6 + 3.6^2 30 + 6^3 = a^3 + 3a^2 b + 3b^2.a + b^3$$

$$30^3 = 27000 = a^3$$
$$3.30^2.6 = 16200 = 3a^2 b$$
$$3.6^2.30 = 3240 = 3b^2 a$$
$$6^3 = 216 = b^3$$

46|6|5|6|

| | |
|---|---|
| bis an den ersten Strich steckt | 27000 |
| — — — zweyten — — — | 16200 |
| — — — dritten — — — | 3240 |
| — — — vierten — — — | 216 |

Daher müssen die 4 Producte nach und nach von der Zahl abgezogen werden.

## §. 69.

### Aufgabe.

Aus einer Zahl von drey, vier ꝛc. Classen eine dreytheilige, viertheilige ꝛc. Wurzel zu ziehen.

Man findet sie nach den Regeln des vorigen §. Hat sie z. B. drey Theile, so suche man anfangs den 1sten und 2ten, sehe darauf beyde zusammen als den 1sten Theil an, und suche nun die 3te Ziffer als den 2ten

2ten Theil. Eben so fahre man fort, wenn noch mehrere Ziffern vorhanden sind. Z. B.

$\sqrt[3]{23393656} = 286.$

| | |
|---|---|
| 23 \| 393 \| 656 \|\| 286 | |
| 8 | |
| 12) 153 | |
| 96 | Probe |
| 579 | 286 |
| 384 | 286 |
| 1953 | 1716 |
| 512 | 2288 |
| 2352) 14416 | 572 |
| 14112 | 81796 |
| 3045 | 286 |
| 3024 | 490776 |
| 216 | 654368 |
| 216 | 163592 |
| 0 | 23393656 |

## §. 70.

## Lehrsatz.

Der Cubus eines Bruchs ist wieder ein Bruch, dessen Zähler und Nenner die Cubi des Zählers und Nenners der Wurzel sind, z. B.

$$\left(\tfrac{2}{5}\right)^3 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{8}{125}.$$

Man zieht daher aus einem Bruche die Cubikwurzel, indem man sie besonders aus dem Zähler und Nenner zieht, welches den Zähler und Nenner der Wur-

zel

zel giebt, z. B. $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}$. Da nun der Cubus einer ganzen Zahl immer eine ganze Zahl ist, so folgt, daß die Wurzel eines eigentlichen Bruchs niemals eine ganze Zahl, sondern wieder ein Bruch ist, und daß die Wurzel einer ganzen Zahl niemals genau durch einen Bruch dargestellt werden kann. Wenn daher bey dem Ausziehen der Wurzel noch ein Rest bleibt, so ist die Wurzel (wie §§. 62. 63.) eine Irrationalgröße, die man weder durch ganze noch gebrochene Zahlen völlig genau darstellen kann. Z. B. $\sqrt[3]{10}$ ist größer als 2 und kleiner als 3. Ihrem wahren Werthe nähert man sich durch Rechnung mit Decimalbrüchen, wie oben.

## §. 71.

### Aufgabe.

Wie nähert man sich dem wahren Werthe einer irrationalen Wurzel durch Decimaltheile?

Man hänge der Zahl, aus der die Cub. Wurzel gezogen werden soll, nach gegebenem Decimalzeichen entweder 3 oder 6 oder 9 Nullen an, weil alsdann aus den Nennern 1000, 1000000, 1000000000 ꝛc. die Wurzel genau gezogen werden kann, sie ist 10, 100, 1000 ꝛc, und setze die Rechnung nach den vorigen Regeln fort. Z. B. $\sqrt[3]{10} = 2,15$ beynahe. $\sqrt[3]{2} = 1,25 \ldots$ beynahe.

10.

```
   10, | 000 | 000 || 2, 15...
    8
  ------
12) 20
    12
  ------
    80
     6
  ------
    740
      1
  ------
1323) 7390
      6615
  ------
      7750
      1575
  ------
     61750
       125
  ------
     61625
```

```
   2, | 000 | 000 || 1, 25...
   1
  ------
3) 10
    6
  ------
    40
    12
  ------
    280
      8
  ------
432) 2720
     2160
  ------
     5600
      900
  ------
     47000
       125
  ------
     46875
```

Die Wurzel wird auch hier nicht vollständig gefunden.

## §. 72.

## Folgesatz.

Um die Cubikwurzel aus einem gewöhnlichen Bruche zu ziehen, kann man ihn in einen Decimalbruch verwandeln (§. 54.), wie im §. 65., doch so, daß die Anzahl der Decimalstellen entweder 3 oder 6 oder 9 u. s. w. wird, damit der Nenner eine vollkommene Cubikzahl werde; darauf wird die Wurzel, wie bey ganzen Zahlen, ausgezogen. Auch hier wird die Rechnung nicht immer grade aufgehen, sondern nur eine Näherung zum wahren

Werthe

Werthe Statt finden. Indessen ist diese Art, aus Brüchen Wurzeln zu ziehen, doch bequemer, als wenn man sie aus dem Zähler und Nenner besonders ziehen wollte, weil man dabey öfters in beyden Irrationalgrößen erhalten würde.

Beyspiele. $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$. Es ist $\frac{8}{27} = 0,296296...$

```
     296 | 296 || 0,66 ....   Es ist 66/100 bey-
     216 |                    nahe = 2/3.
    -----
108) 802
     648
    -----
    1549
     648
    -----
    9016
     216
    -----
    8800
```

$\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \sqrt[3]{0,125} = 0,5 = \frac{1}{2}$.

$\sqrt[3]{\frac{7}{12}} = \sqrt[3]{0,583333....}$

```
     583 | 333 || 0,83 ....
     512 |
    -----
192) 713
     576
    -----
    1373
     216
    -----
   11573
      27
    -----
   11546
```

Vierter

# Vierter Abschnitt.

## Von Verhältnissen und Proportionen.

### §. 73.

### Erklärung.

Zwey Größen von einerley Art können miteinander verglichen werden, z. B. 2 grade Linien, zwey Gewichte, zwey Münzen. Sind sie nicht von einerley Art, so können sie auch nicht miteinander verglichen werden, z. B. eine Ruthe mit einem Pfunde.

Die Vergleichung zwischen gleichartigen Größen kann auf zweyerley Art angestellt werden, 1) wenn man untersucht, um wie viel die eine größer oder kleiner, als die andere ist. Man erhält dann durch die Subtraction den Unterschied, z. B. $10 - 4 = 6$; 2) wenn man untersucht, wie vielmal die eine Größe in der andern enthalten ist. Dieses geschicht durch die Division der einen durch die andere, z. B. $12 : 4 = 3$.

Das erstere heißt das arithmetische Verhältniß, das andere das geometrische. Die beyden Größen, welche verglichen werden, heißen die Glieder des Verhältnisses, das Vorderglied und das Hinter-

terglied (oder das vorhergehende und nachfolgende Glied). Bey dem arithmetischen Verhältnisse gebraucht man das Subtractionszeichen, bey dem geometrischen das Divisionszeichen, und die dritte Zahl, welche man im ersten Falle erhält, heißt der Unterschied, im andern Falle der Exponent (was sonst Quotient heißt). Z. B. $8 - 2 = 6$. Hier ist 6 der Unterschied der zwey Glieder des arithmetischen Verhältnisses. $20 : 5 = 4$. Hier ist 4 der Exponent (oder Verhältnißname) der zwey Glieder des geometrischen Verhältnisses. Dieser ist ein Quotient, der entsteht, indem man das vorhergehende Glied mit dem nachfolgenden dividirt, (oder ein Bruch, dessen Zähler das Vorderglied, und Nenner das Hinterglied ist, $\frac{20}{5} = 4$. Eben so $2 : 3 = \frac{2}{3}$. Es ist $\frac{2}{3}$ der Exponent, welcher anzeigt, wie viel von 3 in 2 enthalten ist.)

## §. 74.

### Lehrsatz.

**Wenn zu beyden Gliedern des arithmetischen Verhältnisses einerley Zahl addirt, oder von beyden einerley Zahl subtrahirt wird; so ändert sich das Verhältniß nicht.**

Denn der Unterschied bleibt derselbe. Z. B. $10 - 6 = 4$, $(10 + 3) - (6 + 3) = 13 - 9 = 4$, ferner $(10 - 2) - (6 - 2) = 8 - 4 = 4$.

Wenn

Wenn beyde Glieder eines geometrischen Verhältnisses mit einerley Zahl multiplicirt oder dividirt werden, so ändert sich das Verhältniß nicht.

Denn der Exponent bleibt derselbe (eben so, wie Brüche ungeändert bleiben, wenn Zähler und Nenner mit einerley Zahl multiplicirt oder dividirt werden), z. B. $32 : 8 = 4$, $32 \cdot 2 : 8 \cdot 2 = 64 : 16 = 4$, ferner $\frac{32}{4} : \frac{8}{4} = 8 : 2 = 4$.

## §. 75.

Man mag Größen, welche man wolle, miteinander vergleichen; so lassen sie sich immer durch Zahlen ausdrücken. Wollte man z. B. die Höhe und Breite eines Fensters miteinander vergleichen, wovon die erste = 6 Schuh, die andere = 2 Schuh; so wäre das arithmetische Verhältniß $6 - 2 = 4$, das Fenster ist 4 Schuh höher als breit; das geometrische Verhältniß ist $6 : 2 = 3$, es ist 3mal so hoch als breit. — Ein Pfund von einer gewissen Waare kostet 4 fl., ein Pfund von einer bessern Sorte kostet 10 fl., also ist nach dem arithmetischen Verhältnisse $10 - 4 = 6$, das eine Pfund ist 6 fl. theurer, als das andere; nach dem geometrischen Verhältnisse ist $10 : 4 = 2\frac{1}{2}$. Das eine Pfund ist zwey und ein halb mal so theuer, als das andere.

## §. 76.

### Erklärung.

Wenn zwey arithmetische Verhältnisse einerley Unterschied haben, so heißt dieses eine arithmetische Proportion.

Sie besteht aus 4 Zahlen, bey denen die 1ste um eben so viel größer oder kleiner als die 2te ist, als es die 3te gegen die 4te ist, z. B. 12 — 4 = 18 — 10. Hier ist der Unterschied in beiden = 8. Daher setzt man das Gleichheitszeichen zwischen die beyden Verhältnisse. 12 und 18 sind die vorhergehenden, 4 und 10 die nachfolgenden Glieder. Ferner heißt man 12 und 10 die äußern, 4 und 18 die mittleren Glieder.

Wenn die mittleren Glieder zwey verschiedene Zahlen sind, wie hier; so heißt die Proportion unstätig (abgesondert): wenn aber die beyden mittlern Glieder einerley sind, so heißt sie stätig, z. B. 20 — 14 = 14 — 8.

## §. 77.

### Lehrsatz.

In einer arithmetischen Proportion ist die Summe der beyden äußern Glieder gleich der Summe der beyden mittlern.

Denn da das 2te und 4te Glied um gleich viel größer oder kleiner als das 1ste und 3te sind; so ist das 2te um eben so viel größer oder kleiner als das 1ste, um wie

wie viel das 3te kleiner oder größer als das 4te ist. Z. B. $12 - 4 = 18 - 10$, hier ist $12 + 10 = 22$, und $18 + 4 = 22$. Denn 4 ist um 8 kleiner als 12, und 18 ist um 8 größer als 10. Daher muß seyn $12 + 10 = (12 - 8) + (10 + 8) = 4 + 18 = 22$.

## §. 78.

### Folgesatz.

Wenn daher umgekehrt bey 4 Zahlen, die Summe von zweyen der Summe der zwey andern gleich ist; so kann man sie in eine arithmetische Proportion setzen, wenn man die ersten als die äußern oder mittlern, die andern als die mittlern oder äußern Glieder ansieht. Daher kann man sie auf achtfache Art versetzen, so, daß immer eine Proportion bleibt, wenn nur die zusammengehörigen Zahlen entweder beyde in der Mitte, oder beyde aussen stehen. Z. B.

$$12 - 4 = 18 - 10$$
$$12 - 18 = 4 - 10$$
$$10 - 4 = 18 - 12$$
$$10 - 18 = 4 - 12$$
$$4 - 12 = 10 - 18$$
$$4 - 10 = 12 - 18$$
$$18 - 12 = 10 - 4$$
$$18 - 10 = 12 - 4$$

Wenn eine größere Zahl von einer kleinern abgezogen wird, so wird der Unterschied verneint, und eben so groß, als wenn die kleinere von der größern abgezogen würde, z. B. $18 - 12 = 6$,

12 —

12 — 18 = — 6. (Wenn man z. B. 12 fl. baar hätte, und sollte 18 bezahlen, so fehlten noch 6).

## §. 79.

### Aufgabe.

Aus drey gegebenen Gliedern einer arithmetischen Proportion das 4te zu finden.

Man ziehe von der Summe des 2ten und 3ten das erste ab, dieses giebt das 4te. Z. B. 18 — 4 = 16 — X. (Das unbekannte 4te Glied wird hier einstweilen mit dem Buchstaben X bezeichnet.) Hier ist 16 + 4 = 20, und 20 — 18 = 2, also ist X = 2. Es ist 18 — 4 = 16 — 2, weil 18 + X = 4 + 16.

## §. 80.

### Aufgabe.

Wenn in einer stätigen arithmetischen Proportion die beiden äußern Glieder bekannt sind, und das mittlere unbekannt ist, wie findet man dasselbe?

Man addirt die beiden äußern Glieder, und halbirt die Summe. Diese ist das mittlere Glied. Z. B. 24 — X = X — 8. Es ist $X = \frac{24 + 8}{2} = \frac{32}{2} = 16$, also 24 — 16 = 16 — 8. Der Beweis dieser und der vorhergehenden Aufgabe fließt aus §. 77.

Man

Man heißt dieses das arithmetische Mittel zwischen zwey gegebenen Zahlen. So ist 8 das Mittel zwischen 4 und 12, 20 zwischen 10 und 30 u. s. w.

Bey dieser Gelegenheit kann bemerkt werden, daß man auch unter mehr als zwey Zahlen eine mittlere Zahl im Durchschnitte findet, wenn man dieselben addirt, und mit der Anzahl der Glieder dividirt. Wenn man z. B. wüßte, wie viele Menschen in 6 Jahren an einem Orte gestorben wären; so könnte man finden, wie viele im Durchschnitte jährlich daselbst sterben. Die Anzahl sey

| | |
|---|---|
| im 1ten Jahre — — | 280 |
| — 2ten — — — | 300 |
| — 3ten — — — | 272 |
| — 4ten — — — | 307 |
| — 5ten — — — | 225 |
| — 6ten — — — | 320 |

6 | 1704 | 284 ist die mittlere Zahl.
50
24
0

Ein anderes Beyspiel ist, wenn man den reinen Ertrag von einem gewissen Landgute mehrere Jahre lang aufzeichnet, und daraus den mittlern jährigen Ertrag im Durchschnitte berechnet. Es habe eingetragen

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| im | 1ten | Jahre | — — | 1460 fl. |
| — | 2ten | — | — — | 1321 — |
| — | 3ten | — | — — | 1002 — |
| — | 4ten | — | — — | 1519 — |
| — | 5ten | — | — — | 1217 — |
| — | 6ten | — | — — | 1333 — |
| — | 7ten | — | — — | 1408 — |
| — | 8ten | — | — — | 1300 — |
| — | 9ten | — | — — | 1225 — |
| — | 10ten | — | — — | 1375 — |

10 | 13160 | 1316 ist die gesuchte Zahl.

§. 81.

## Erklärung.

Eine geometrische Proportion entsteht aus zwey gleichen geometrischen Verhältnissen, die nämlich einerley Exponenten haben.

Z. B. 20 : 4 = 25 : 5, zwanzig verhält sich zu 4, wie 25 zu 5. Hier ist der Exponent in beyden = 5. Die beyden Zahlen 20 und 25 sind die vorhergehenden, 4 und 5 die nachfolgenden Glieder. Ferner sind 20 und 5 die äußern, 4 und 25 die mittlern Glieder. Bestehen die mittlern Glieder aus zwey verschiedenen Zahlen, so ist die Proportion unstätig, ist aber das zweyte und dritte Glied einerley, so ist sie stätig, z. B. 2 : 4 = 4 : 8, 25 : 5 = 5 : 1.

§. 82.

## §. 82.

### Lehrsatz.

In jeder geometrischen Proportion ist das Product der äußern Glieder gleich dem Producte der mittlern.

Denn das 1ste und 3te Glied entsteht durch die Multiplication des Exponenten mit dem 2ten und 4ten Gliede. Daher bestehen die Producte der äußern und mittlern Glieder aus denselben Factoren; nämlich 1) dem Exponenten, 2) dem 2ten Gliede, 3) dem 4ten Gliede. Also müssen diese Producte einander gleich seyn. Z. B.

$20 : 4 = 25 : 5$ oder $7 : 21 = 11 : 33$
$4 . 5 : 4 = 5 . 5 : 5 \quad \frac{1}{3} . 21 : 21 = \frac{1}{3} . 33 : 33$
$4 . 5 . 5 = 4 . 5 . 5 . \quad \frac{1}{3} . 21 . 33 = 21 . \frac{1}{3} . 33.$
$100 = 100 \quad 231 = 231.$

Daher ist in einer stätigen geometrischen Proportion das Product der äussern Glieder gleich dem Quadrate des mittlern.

$4 : 8 = 8 : 16 \quad 6 : 12 = 12 : 24$
$4 . 16 = 8^2 \quad 6 . 24 = 12^2$
$64 = 64 \quad 144 = 144.$

## §. 83.

### Lehrsatz.

Wenn 4 Zahlen, die man in eine Reihe setzt, so beschaffen sind, daß die Producte der äußern und mittlern Glieder gleich sind; so stehen sie in einer geometrischen Proportion.

Dieses ist der umgekehrte vorige Satz. Z. B.

7, 9, 21, 27. Da 7 . 27 = 9 . 21 = 189, so ist 7 : 9 = 21 : 27.

## §. 84.

### Folgesatz.

Man kann daher aus jeden zwey gleichen Producten, welche sich in Factoren zerfällen lassen, eine Proportion formiren, wenn man die Factoren des einen Products zu äußern Gliedern, die des andern zu mittlern macht (oder die erstern zu mittlern, die letztern zu äußern Gliedern), z. B.

36 = 4 . 9 = 2 . 18. Also 4 : 2 = 18 : 9
oder 2 : 4 = 9 : 18.

Man kann auch jede Zahl als ein Product aus der Einheit in die Zahl selbst ansehen. Z. B. 27 = 1 . 27. Da diese auch = 3 . 9, so kann man setzen 1 : 3 = 9 : 27. Daraus folgt, daß die Einheit sich zu dem einen Factor eines Products verhält, wie der andere Factor zu dem Producte selbst. Z. B.

7 . 11 = 77, also 1 : 7 = 11 : 77, oder 1 : 11 = 7 : 77.

Da ferner der Divisor und Quotient Factoren des Dividendi sind, so verhält sich die Einheit zum Quotienten, wie der Divisor zum Dividendo, oder die Einheit zum Divisor, wie der Quotient zum Dividendo. Z. B.

48 : 6 = 8, also 1 : 6 = 8 : 48 oder 1 : 8 = 6 : 48.

§. 85.

## Folgesatz.

Man kann die Glieder einer Proportion versetzen, wenn nur die Producte der äussern und mittlern Glieder gleich bleiben. Es wird daher immer eine Proportion bleiben, wenn die beyden äußern Glieder entweder beyde das 1ste und 4te, oder beyde das 2te und 3te Glied sind. Dieses giebt eine achtfache Veränderung bey jeder geometrischen Proportion. Z. B.

$4 : 12 = 5 : 15$ $12 : 4 = 15 : 5$
$4 : 5 = 12 : 15$ $12 : 15 = 4 : 5$
$15 : 12 = 5 : 4$ $5 : 4 = 15 : 12$
$15 : 5 = 12 : 4$ $5 : 15 = 4 : 12$

§. 86.

## Folgesatz.

Zwey gleiche Brüche sind so beschaffen, daß der Zähler des einen in dem dazu gehörigen Nenner so oft steckt, als der Zähler des andern in dem dazu gehörigen Nenner. Daher lassen sich die 4 Zahlen in eine Proportion setzen, wenn man sagt, der Zähler und Nenner des 1sten Bruchs verhalten sich, wie der Zähler und Nenner des andern. Z. B.

$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$, also $3 : 4 = 9 : 12$
oder $4 : 3 = 12 : 9$.

§. 87.

## §. 87.

### Aufgabe.

Wenn in einer stätigen geometrischen Proportion die äußern Glieder bekannt sind, und das mittlere unbekannt (welches wir mit X bezeichnen wollen); so soll dieses letztere gefunden werden.

Man multiplicire die äußern Glieder, und ziehe aus dem Producte die Quadratwurzel. Diese ist das gesuchte mittlere Glied. Z. B. $4 : X = X : 16$. Nun ist $4 . 16 = 64$, und $\sqrt{64} = 8$, also $X = 8$, also $4 : 8 = 8 : 16$.

Ferner $15 : X = X : 135$. Nun ist

```
√ 2025 = 45 = X                    135
   20|25 || 45                      15
   16                              ────
 ──────                             675
 8 | 42                            135
     40                           ─────
 ──────                            2025
     25
     25
 ──────
      0
```

Also $15 : 45 = 45 : 135$.
Denn $15 . 135 = X^2$
$\sqrt{15 . 135} = \sqrt{2025} = 45 = X$

Der Beweis gründet sich auf §. 82.

## §. 88.

### Aufgabe.

Wenn die drey ersten Glieder einer Proportion bekannt sind, das 4te unbekannte zu finden.

Man multiplicire das 2te und 3te Glied, und dividire das Product durch das 1ste. Der gefundene Quotient ist das 4te Glied, wel-

welches zu der vorgegebenen Proportion gehört. Z. B.

$$5 : 20 = 6 : X \qquad 5 \mid 120 \mid 24 = X$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ 6 \\ \hline 120 \end{array} \qquad \begin{array}{r} X \\ 5 \\ \hline 120 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 120 \\ 10 \\ \hline 20 \\ 20 \\ \hline 0 \end{array}$$

Also 5 : 20 = 6 : 24. Wenn 5 Pfund einer Waare 20 fl. kosten, so kosten 6 Pfd. davon 24 fl.

Nach dem §. 82. ist das Product der mittlern Glieder gleich dem Producte der äußern. Wenn man daher 6. 20 gefunden hat, so ist dieses = 5. X. Hier ist ein Factor bekannt, der andere unbekannt. Man findet also den letzten, wenn man den ersten in das Product dividirt, also ist

$$\frac{6 . 20}{5} = \frac{120}{5} = X = 24.$$

Mann nennt diese Aufgabe gewöhnlich die Rechnung nach der Regel de Tri (de tribus numeris oder terminis.) Man macht davon in sehr vielen Rechnungen mancherley Gebrauch, wie in der Folge in Beyspielen gezeigt werden soll.

Wenn die Regel de Tri in benannten Zahlen gebraucht wird, so sind 2 gleichnamige Glieder bekannt, das dritte ist gleichnamig mit dem gesuchten (oder unbekannten). Der Ansatz kann auf zweyerley Art gemacht werden, 1) entweder daß die zwey bekannten gleichnamigen Glieder die erste und zweyte Stelle einnehmen, und das mit dem

dem gesuchten gleichnamige die 3te Stelle. Z. B. 5 Pfd. : 6 Pfd. = 20 Fl. : X.

Also verhalten sich 5 Pf. zu 6 Pfd., wie 20 Fl. zu der gesuchten Zahl von Fl. (nämlich 24 Fl.) — 2) oder daß die zwey bekannten gleichnamigen Glieder die erste und dritte Stelle einnehmen, und das mit dem gesuchten gleichnamige die zweyte Stelle. Z. B.

5 Pfd. : 20 Fl. = 6 Pfd. : X Fl.

5 Pfd. kosten 20 Fl., was kosten 6 Pfd.?

Hier kann man zwar nicht sagen, 5 Pfd. verhalten sich zu 20 Fl., wie 6 Pfd. zu 24 Fl., weil die Pfunde zu den Gulden, als Dingen von ganz verschiedener Art, nicht in ein Verhältniß gesetzt werden können. Wenn man aber die Benennung wegläßt, und die Zahlen allgemein betrachtet (ohne Rücksicht darauf zu nehmen, was sie für Dinge bedeuten sollen): so kann man allerdings sagen, 5 verhält sich zu 20, wie 6 zu 24, so gut wie 5 verhält sich zu 6, wie 20 zu 24 (siehe §. 85). Es ist also gleich viel, welche Art von Ansatz man wählen will, die Rechnung muß doch immer dieselbe Zahl geben.

§. 89.

## Lehrsatz.

So wenig sich der Werth eines Bruchs ändert, wenn man Zähler und Nenner mit einerley Zahl multiplicirt, oder dividirt: eben so wenig ändert sich ein Verhältniß dadurch,

daß

daß man die zwey Glieder desselben mit einerley Zahl multiplicirt oder dividirt.

Denn der Exponent bleibt immer derselbe, weil die beyden Glieder durch Multiplication mit einer und derselben Zahl gleich vielmal vermehrt, und durch Division gleich vielmal vermindert werden.

Z. B. 2 : 3 = (2. 4) : (3. 4) = 8 : 12

Ferner 20 : 24 = (20. 4) ; (24. 4) = 5 ; 6

Daraus folgt, daß man, wenn das 1ste und 2te Glied einen gemeinschaftlichen Factor haben, beyde mit diesem Factor dividiren kann, wodurch man kleinere Zahlen erhält, die bequemer zum Rechnen sind, und doch das vorige Verhältniß haben. Z. B.

30 : 45 = 41 : X Also 2 : 3 = 41 : X

2. 15 : 3. 15 = 41 : X

2 | 123 | $61\frac{1}{2}$ = X

Da nach dem vorigen §. das 1ste Glied sich auch zum 3ten verhält, wie das 2te zu dem 4ten; so kann man diesen Vortheil auch alsdann anwenden, wenn das 1ste und 3te Glied sich durch einerley Zahl dividiren lassen. Z. B.

12 : 13 = 44 : X

3. 4 : 13 = 11. 4 : X, 3 : 13 = 11 : X

3) 143 | $47\frac{2}{3}$ = X

Man kann zuweilen das 1ste Glied gegen das 2te, und darauf das nun gefundene 1ste auch gegen das 3te Glied aufheben. Z. B.

$21 : 24 = 35 : X$
$3 . 7 : 3 . 8 = 5 . 7 : X$
$7 : 8 = 35 : X. \ \frac{8 \cdot 35}{7} = 40$
$1 : 8 = 5 : X, \ 5 . 8 = 40 = X$

Oefters findet man leicht eine Zahl, womit sich dieses Verkleinern des 1sten und 2ten, oder 1sten und 3ten Gliedes verrichten läßt. Man kann dazu die Regeln gebrauchen, die bey dem Aufheben der Brüche angeführt worden sind (§. 32.). Z. B. wenn das 1ste und 2te (oder 1ste und 3te) Glied gerade Zahlen sind, wenn ihre letzten Ziffern 5 oder 0, oder bey beyden 0 sind; so lassen sie sich durch 2, 5, 10 heben u. s. w. Ingleichem, wenn sich die Summe ihrer Ziffern (alle als Einer betrachtet) durch 3 oder 9 ohne Rest dividiren läßt; so lassen sich die Zahlen durch 3 oder 9 heben.

Einige Beyspiele:

$100 : 34 = 20 : X$
$10 : 34 = 2 : X$
$5 : 17 = 2 : X, \quad X = \frac{34}{5} = 6\frac{4}{5}$

Ferner

$210 : 70 = 33 : X$
$21 : 7 = 33 : X$
$3 : 1 = 33 : X$
$1 : 1 = 11 : X$, also $X = 11$

Ferner

$840 : 72 = 175 : X, \ 4 . 5 . 6 . 7 : 4 . 3 . 6 = 5 . 5 . 7 : X$
$5 . 7 : 3 = 5 . 5 . 7 : X$
$1 : 3 = 5 : X = 15.$

§. 90.

## §. 90.

### Lehrsatz.

Wenn ein oder etliche Glieder aus Brüchen bestehen, so multiplicirt man den Bruch mit seinem Nenner, dieses giebt die ganze Zahl, welche der Zähler anzeigt (§. 30.) Damit sich aber das Verhältniß nicht ändert, so muß das dazu gehörige Glied auch mit diesem Nenner multiplicirt werden (§. 89). Hierauf hat man nur mit ganzen Zahlen zu rechnen, welches bequemer ist, als mit Brüchen.

1) Ist das 1ste Glied ein Bruch, so multiplicire man es selbst, und das 2te (oder 3te) mit dem Nenner

$\frac{2}{3} : 4 = 8 : X$, $2 : 12 = 8 : 48$, oder $2 : 4 = 24 : 48$.

2) Ist das 2te Glied ein Bruch, so multiplicire man mit seinem Nenner es selbst und das 1ste Glied.

$9 : \frac{3}{5} = 30 : X$, $45 : 3 = 30 : 2$.

3) Ist das 3te Glied ein Bruch, so multiplicire man mit seinem Nenner es selbst und das 1ste Glied.

$6 : 8 = \frac{2}{3} : X$, $18 : 8 = 2 : \frac{8}{9}$.

4) Sind das 1ste und eines der beyden andern Glieder Brüche, so multiplicire man jedes mit seinem eignen Nenner, und die dadurch erhaltene ganze Zahl mit dem Nenner des andern.

$\frac{3}{8} : \frac{2}{3} = 4 : X$, 3. 3 : 2. 8 = 4 : X
9 : 16 = 4 : $7\frac{1}{9}$

$\frac{2}{3} : 5 = \frac{1}{2} : X$, 2. 2 : 5 = 1. 3 : X
4 : 5 = 3 : $3\frac{3}{4}$

5) Sind das 2te und 3te Glied Brüche, so multiplicire man sie beyde mit ihren Nennern, und darauf mit beyden Nennern das 1ste.

$2 : \frac{3}{5} = \frac{7}{8} : X$

2. 5. 8 : 3 = 7 : X

80 : 3 = 7 : $\frac{21}{80}$.

6) Sind die 3 Glieder Brüche, so multiplicire man sie zuerst jedes mit seinem Nenner, darauf das 1ste Glied mit den beyden Nennern des 2ten und 3ten (oder mit dem Producte dieser Nenner), und mit dem Nenner des 1sten das 2te oder 3te, (welches man will).

$\frac{6}{7} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} : X$, 6. 5. 3 : 4. 7. = 2 : X
90 : 28 = 2 : $\frac{56}{90}$.

7) Sind gemischte Brüche vorhanden, so richte man sie erst ein (§. 30.), und verfahre hernach mit den unächten Brüchen nach den vorigen Regeln.

$2\frac{1}{3} : 6\frac{3}{8} = 4\frac{2}{9} : X$

$\frac{7}{3} : \frac{51}{8} = \frac{38}{9} : X$, 7. 8. 9 : 51. 3 = 38 : X

§. 91.

Lehrsatz.

Zwey Brüche, die gleiche Nenner haben, verhalten sich wie ihre Zähler.

Z. B.

Z. B. $\frac{3}{8} : \frac{5}{8} = 3 : 5$, weil sich das Verhältniß nicht ändert, wenn man sie beyde mit dem gemeinschaftlichen Nenner multiplicirt.

Wenn daher bey einem oder etlichen Gliedern Decimalbrüche vorkommen, so bringe man das zugehörige Glied dadurch unter einerley Benennung, daß man ihm so viele Nullen anhängt, als nöthig sind, um beyden gleich viele Decimalstellen zu geben. Hierauf kann man sie als ganze Zahlen ansehen, und auf gewöhnliche Art das 4te Glied suchen. Z. B.

$$2,4 : 12 = 82 : X$$
$$2,4 : 12,0 = 82 : X$$
$$24 : 120 = 82 : 410.$$

Ferner $6,1 : 1,72 = 34 : X$
$$610 : 172 = 34 : X$$

Ferner $5 : 9,1 = 4,28 : X$
$$50 : 91 = 4,28 : X$$
$$5000 : 91 = 428 : X$$

## §. 92.

### Lehrsatz.

Wenn ein oder etliche Glieder aus verschiedenen Sorten von Größen bestehen (z. B. Fl., Alb., Pf., oder Centner, Pfd., Loth u. dergl.); so verwandle man die größern in die kleinste Sorte. In eben diese Sorte verwandelt man auch das gleichnamige Glied.

Ist

Ist das mit dem gesuchten gleichnamige Glied auch in der kleinsten Sorte ausgedrückt, so findet man das gesuchte auch in derselben Sorte.

Denn durch diese Verwandlung wird an den Größen nichts verändert, und also auch ihr Verhältniß nicht. Z. B.

20 Pfd. 4 fl. + 6 Xr. = 41 Pfd. + 12 Lth. : X

```
 32      60           32
----    ----        ----
 40     246           82
60                   123
----               ------
640                 1312
                      12
                   ------
                    1324
```

640 Lth. : 1324 Lth. = 246 Xr. : X = 8 Fl. 28, 91 Xr.

```
   1324  640 | 325704 |  508 584/640 Xr.
    246      | 3200   |
   -----      --------
   7944         5704
  5296          5120
 2648          ------
 ------          584
 325704        -----
        Oder   5840   | 508, 91 Xr. =
               5760     8 Fl. 28, 91 Xr.
              ------
                800
                640
              ------
                160.
```

## §. 93.

## Folgesätze.

Man wendet die Regel de Tri in mancherley Fällen an:

1.) Bey Verwandlung eines Bruchs in einen gleich großen von gegebenem Nenner. Dieses findet z. B. Statt, wenn ein gewöhnlicher Bruch in einen Decimalbruch von gegebenem Nenner (als 10, 100, 1000 u. s. w.) verwandelt werden soll. Man sucht nun den dazu gehörigen Zähler nach der Regel de Tri (§. 86). Wie sich der Nenner und Zähler des gegebenen Bruchs gegeneinander verhalten, so verhalten sich der Nenner und Zähler des gleich großen Decimalbruchs. Z. B.

$$\frac{3}{8} = \frac{X}{1000}, \qquad 8 : 3 = 1000 : X$$

$$\begin{array}{l} 8 \;|\; 3000 \;|\; 375 = X \\ \quad\;\; \underline{\;\;\;\;\;} \\ \quad\;\;\; 60 \\ \quad\;\; \underline{\;\;\;\;\;} \\ \quad\;\;\; 40 \end{array}$$

Also $\frac{3}{8} = \frac{375}{1000} = 0,375.$

(Diese Aufgabe, die oben §. 54. schon vorgekommen war, ist hier nur in etwas veränderter Form dargestellt.)

2.) Bey Reductionen oder Verwandlungen eines Maaßes, Gewichts, Geldsorte u. dergl. in eine andere. Um dieses thun zu können, muß das Verhältniß der verschiedenen Größen gegeneinander bekannt seyn. Z. B.

1440 rheinländische Fuß = 1391 pariser Fuß. Wie viele von den letztern gehen auf eine deutsche Meile, die 23640 rheinl. Fuß hält?

```
10) 144 | 0 : 1391 = 2364 | 0
 4)  36       591      591
             1391
            -----
              591
             5319
            1773
            591
          --------
     36 | 822081 | 22835 21/36
          72
          ---
          102
           72
          ---
           300
           288
          ----
           128
           108
          ----
            201
            180
           ----
             21
```

24 Livres = 11 fl. Wie viele Livres sind 1000 fl.?

```
   11 : 24 = 1000
   11)  24000 | 2181, 8
       --------
         20
        ----
          90
         ----
           20
          ----
            90
           ----
             2
```

Wie

Wie viele fl. sind 1000 Livres?

24 : 11 = 1000

```
24) 11000 | 458, 33 . . . = 458 fl. 20 kr.
     96
    ---
    140
    120
    ---
     200
     192
     ---
      80
      72
      --
      80
```

3) Bey Berechnung von Waaren und ihren Preisen gegeneinander.

```
2 Pfd. 6 Loth: 1 Fl. 3 Xr. = 10 Pfd.
      70 Loth: 63 Xr. = 320 Loth.
       7       63 Xr.     32
       1        9         32
      32
       9
   --------
   288 Xr. = 4 Fl. 48 Xr.
```

4) Bey Berechnung des Lohns für gewisse Arbeiten. Wie die Zahl der Arbeiter oder die Menge der Arbeit wächst, nimmt auch der Lohn zu. Z. B. Ein Mann bekömmt für eine gewisse Arbeit $22\frac{1}{2}$ Xr. Tagelohn, wie viel bekommen 16 Mann?

```
1 : 22½ = 16
------
2 : 45  = 16
      16
    ----
     270
     45
    ----
2) 720) 360 = 6 Fl.
```

Für $3\frac{1}{2}$ Tag bekommt einer $2\frac{1}{3}$ fl., wie viel für 18 Tage?

$$\frac{3\frac{1}{2} \quad 2\frac{1}{3}}{}$$
$$\frac{7}{2} : \frac{7}{3} = 18$$
$$21 : 14 = 18$$
$$3 : 2 = 18$$
$$1 : 2 = 6 : 12$$

5) Bey Berechnung einfacher Zinsen von einem Capital. Z. B. Wie viel Zinsen trägt ein Capital in 1 Jahre zu einem bestimmten Zinsfuße, z. B. 2400 fl. zu 5 p. C.

$$100 : 5 = 2400 :$$
$$1 : 5 = 24 : 120$$
$$\frac{24 \times 5}{120}$$

Wie viel 100000 fl. zu $3\frac{1}{2}$ p. C.

$$100 : 3\tfrac{1}{2} = 100000$$
$$2 : 7 = 1000$$
$$1 : 7 = 500 : 3500.$$

Wie viel macht die Summe der Zinsen in 8 Jahren?

$$1 : 3500 = 8 : 28000.$$

Wie viel in 4 Jahren und 7 Monaten?

$$12 \text{ Mon.} : 3500 = 55 \text{ Mon.}$$
$$3 : 875 = 55$$
$$\frac{875 \times 55}{4375 + 4375}$$
$$3 \mid 48125 \mid 16041\tfrac{2}{3}.$$

Wie

Wie viel Zinsen zu 4 p. C. tragen 100000 fl. in 1 Tage?

In einem Jahre 100 : 4 = 100000
1 : 4 = 1000 : 4000
In 365 Tagen : 4000 fl. = 1 Tage
365 | 4000 | 10,9 ist beynahe 10 fl. 54 kr.
350
3500

Wie groß ist das Capital, das zu 5 p. C. verliehen, in 1 Jahre 855 fl. Zinsen trägt?

5 : 100 = 855
1 : 100 = 171 : 17100

Wie lange muß ein Capital = 4000 fl. stehen, bis die Summe der einfachen Zinsen zu 5 p. C. sich auf 850 fl. belauft?

In einem Jahre 100 : 5 = 4000
1 : 5 = 40 : 200
200 fl. : 1 Jahre = 850 fl.
50) 4 : 1 = 17 : $4\frac{1}{4}$ = 4 Jahre, 3 Monate.

Wie groß ist ein Capital von 100000 fl. zu 5 p. C. verliehen, in drey Jahren, wenn jährlich die Zinsen zum Capital geschlagen werden, so, daß sie auch Zinsen tragen?

Es ist am Ende des

1ten Jahres = 105000; denn
100 : 5 = 100000 : 5000.
— 2 — — — = 110250; denn
100 : 5 = 105000 : 5250.
— 3 — — — = $115762\frac{1}{2}$; denn
100 : 5 = 110250, $5512\frac{1}{2}$

## §. 94.

### Erklärung.

Wenn man die 2 bekannten gleichnamigen Glieder an die 1te und 3te Stelle und das mit dem gesuchten gleichnamige Glied in die 2te setzt, und die Umstände der Aufgabe zeigen an, daß, je größer oder kleiner das 3te Glied, desto größer oder kleiner auch das 4te (gesuchte) seyn müsse, das ist, daß das 3te und 4te Glied miteinander wachsen oder miteinander abnehmen müssen; so heißt man die Rechnung gewöhnlich die grade Regel de Tri.

Dieses war in den vorigen Beyspielen der Fall, z. B. je mehr Waare, oder Arbeit, oder Capital, desto größer der Preis, oder der Lohn, oder die Zinsen u. s. w.

Wenn aber die Umstände der Aufgabe zeigen, daß, je größer das 3te Glied, desto kleiner das 4te, oder je kleiner das 3te, desto größer das 4te seyn müsse, das ist, wenn das 4te (gesuchte) Glied in eben dem Verhältnisse zunehmen muß, als das 3te abnimmt, oder abnehmen muß, als das 3te zunimmt; so heißt man die Rechnung gewöhnlich die verkehrte Regel de Tri.

Z. B. Wenn 5 Mann eine Wiese in 18 Stunden mähen, wie viel Stunden brauchen dazu 9 Mann? Hier muß in eben dem Verhältnisse, als die Zahl der Arbeiter zunimmt, die Zeit, welche sie dazu brauchen, abnehmen, weil die Arbeit dieselbe bleibt.

## §. 95.

## Aufgabe.

Wie berechnet man eine Aufgabe aus der verkehrten Regel de Tri?

Man macht den Ansatz zuerst, wie bey der graden Regel de Tri, hierauf versetzt man die beyden bekannten gleichnamigen Glieder, so, daß das erste an die Stelle des 3ten, und das 3te an die Stelle des 1ten kömmt, und sucht nachher das 4te Glied nach der gewöhnlichen Regel §. 88. Man setze 5 Mann 18 Stunden, 9 Mann X Stunden. Da aber in eben dem Verhältnisse, als 9 gegen 5 größer ist, das gesuchte gegen 18 kleiner seyn muß; so wird erst dadurch der Ansatz richtig, daß erstlich 9, als die größere Zahl von den zwey bekannten gleichnamigen, in das erste Verhältniß zu 18, der größern von den zwey andern gleichnamigen, gesetzt wird. Also ist das 1te Verhältniß 9 : 18. Zweitens daß 5, als die kleinere Zahl von den zwey bekannten gleichnamigen, in das 2te Verhältniß zu X, der kleinern von den zwey andern gleichnamigen Zahlen, gesetzt wird. Also ist das 2te Verhältniß 5 : X.

Anstatt 5, 18, 9, X setzt man

$$
\begin{array}{l}
9 : 18 = 5 : X \\
\phantom{9 : 1}5 \\
\hline
9)\ 90 \mid 10 = X.
\end{array}
$$

Daher brauchen 9 Mann nur 10 Stunden Zeit.

Noch einige Beyspiele. Wenn ein Kriegsschiff, das 700 Mann hat, auf 3

Mo-

Monate = 90 Tage mit Proviant versehen ist, wie lange werden 1000 Mann von diesem Proviant leben können? Je mehrere Menschen, desto kürzere Zeit. Man setze zuerst:

700, 90, 1000

und verwechsele das 1te und 3te Glied miteinander:

$$1000 : 90 = 700 : X$$
$$1 : 9 = 7 : 63 \text{ Tage.}$$

Wenn Jemand von einer gewissen Summe Geldes täglich $2\frac{1}{2}$ fl. ausgiebt, so kann er 70 Tage damit auskommen; giebt er aber täglich nur $1\frac{2}{3}$ fl. aus, so kann er länger auskommen.

$$2\tfrac{1}{2},\ 70,\ 1\tfrac{2}{3}$$
$$\tfrac{5}{2} \qquad \tfrac{5}{3}$$
$$\tfrac{5}{3} : 70 = \tfrac{5}{2} : X$$
$$10 : 70 = 15 : X$$
$$1 : 7 = 15 : 105.$$

## §. 96.

## Lehrsatz.

Wenn die Glieder von zwey Proportionen der Ordnung nach miteinander multiplicirt werden, so entsteht eine neue Proportion.

Denn das Product der Exponenten in den zwey ersten Proportionen wird der Exponent in den beyden Verhältnissen der neuen Proportion. Z. B.

$2 : 4 = 5 : 10.$ Der Exponent ist 2.
$3 : 9 = 4 : 12$ „ „ „ 3.

$6 : 36 = 20 : 120$ „ „ „ $2.3 = 6$

Man könnte setzen $2 : 2.2 = 5 : 2.5$
$3 : 3.3 = 4 : 3.4$

$6 : 6.6 = 20 : 6.20$

Man kann auf diese Art auch 3, 4 und mehrere Proportionen untereinander setzen und miteinander multipliciren. Die Producte geben wieder eine Proportion, weil der Exponent ihrer beyden Verhältnisse = dem Producte aller einzelnen Exponenten der miteinander multiplicirten Proportionen. Z. B.

| | |
|---|---|
| $1 : 2 = 2 : 4$ | $1 : 2.1 = 2 : 2.2$ |
| $3 : 5 = 6 : 10$ | $3 : \frac{5}{3}.3 = 6 : \frac{5}{3}.6$ |
| $2 : 6 = 4 : 12$ | $2 : 3.2 = 4 : 3.4$ |
| $6 : 60 = 48 : 480$ | $6 : 10.6 = 48 : 10.48.$ |

Wenn das letzte Glied in einer von solchen Proportionen unbekannt wäre, so könnte man sie auf diese Art miteinander multipliciren, und darauf in der neuen Proportion das unbekannte Glied auf die gewöhnliche Art suchen. Man heißt dieses die Zusammensetzung der Proportionen. Lassen sich ein oder etliche von den 1ten Gliedern gegen die 2ten oder 3ten (oder auch von den 3ten gegen die 4ten) aufheben, so kann man (§. 89.) dieses zuvor thun, um die Rechnung zu erleichtern. Z. B.

$$\begin{array}{l}
1 : 2 = 2 : 4 \\
3 : 5 = 6 : 10 \\
2 : 2 . 3 = 4 : X \\
\hline
1 : 10 = 48 : 40 . X
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\text{Also } 40\, X = 480 \\
X = 12.
\end{array}$$

Hätte man auch die 3ten Glieder gegen die 4ten aufgehoben, so hätte man erhalten

$$\begin{array}{r}
1 : 10 = 6 : 5 . X \\
60 = 5 . X \\
12 = X
\end{array}$$

Wenn ferner $2 : 4 = 3 : X$

$$\begin{array}{r}
5 : 15 = X : y \\
\hline
10 : 60 = 3 : y \\
1 : 6 = 3 : y
\end{array}
\quad \text{Es ist } y = 18.$$

Oder $4 : 6 = 7 : X$

$$\begin{array}{l}
7 : 14 = X : y \\
3 : 4 = y : z \\
\hline
3 . 4 . 7 : 4 . 6 . 14 = 7 : z \\
1 : 2 . 14 = 1 : z \\
1 : 28 = 1 : 28.
\end{array}
\quad \text{Es ist } z = 28.$$

## §. 97.

### Lehrsatz.

Man gebraucht die Zusammensetzung der Proportionen zur Verkürzung der Rechnung in solchen Fällen, wo man eine Größe sucht, die von mehrern andern Größen zugleich so bestimmt wird, daß sie mit jeder derselben in geometrischem Verhältnisse wächst oder abnimmt.

Wenn

Wenn man z. B. sagt, 100 Fl. geben in 12 Monaten 5 Fl. Interesse, wie viel geben 60 Fl. in 8 Monaten? so wird das Gesuchte sowohl durch die Größe des Capitals, als die Länge der Zeit, worinn das Capital Zinsen trägt, bestimmt. Man könnte hier die Regel de Tri zweymal brauchen. (In einem Jahre) 100 Fl. : 60 = 5 Fl. : 3. Ferner in 12 Monaten : 8 Monate = 3 Fl. : 2 Fl.

Um der Kürze willen setzt man diese Proportionen zusammen.

$$100 : 5 = 60 : X \quad \text{Hier ist } X = 3$$
$$12 : 8 = X : y$$
$$1200 : 40 = 60 : y$$
$$\overline{12 : 4 = 6 : y}$$
$$12)\ 24)\ 2 = y$$

Da man in solchen Fällen die ersten Glieder gegen die zweyten und dritten aufheben kann, so macht man einen Strich, setzt die ersten Glieder zur linken, die zweyten und dritten zur rechten des Strichs, hebt gegeneinander auf, was sich heben läßt, und multiplicirt die nach diesem übrig bleibenden Factoren auf beyden Seiten, jede besonders miteinander, und dividirt das Product zur rechten durch das Product zur linken. Der Quotient ist die gesuchte Zahl.

| | |
|---|---|
| 100 | 5 |
| 12 | 8 |
| | 60 |

20 | 40 | 2 = die gesuchte Zahl.

Weil man hier aus 5 oder 7 Zahlen (auch noch mehrern zuweilen) eine unbekannte sucht; so heißt diese Rechnung die regula quinque oder septem, überhaupt die zusammengesetzte Regel de Tri.

Einige Beyspiele. (Mehrere finden sich im Anhange). 12 Centner werden 40 Meilen weit für 100 Fl. gefahren; was kosten 20 Centner 56 Meilen weit zu fahren?

| | | |
|---|---|---|
| 12 | 100 | |
| 40 | 20 | |
| | 56 | |
| 3 | 700 | 233 $\frac{1}{3}$ fl. |

Man kann auch, um das Ausstreichen zu vermeiden, neue Striche machen, und die übrigen Factoren daneben setzen.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 6 | 12 | 100 | 10 | 5 | |
| | 4 | 40 | 20 | 10 | 10 | |
| | | | 56 | 56 | 14 | |
| 3 | | | | | 700 | 233 $\frac{1}{3}$ fl. |

20 Menschen arbeiten 15 Wochen täglich 6 Stunden, und verdienen 1000 Fl.; was verdienen 36 Menschen in 18 Wochen, wenn sie täglich 8 Stunden arbeiten?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 20 | 1000 | 50 | 10 |
| 1 | 15 | 15 | 36 | 36 | 36 |
| | | 6 | 18 | 3 | |
| | | | 8 | 8 | 8 |
| | | | | | 2880 fl. |

Kömmt auf einer Seite ein ächter oder unächter Bruch vor, so läßt man seinen Zähler stehn, und setzt seinen Nenner als Factor auf die andere Seite (§. 90). Z. B.

Titius

Titius geht 6 Stunden lang, jede Minute 60 Schritte, und legt einen Weg von $2\frac{1}{4}$ deutschen Meilen zurück. Ein andermal geht er 10 Stunden lang, jede Minute 100 Schritte. Wie viele Meilen wird er zurücklegen (wenn seine Schritte von derselben Größe sind)?

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 6 | 6 | $2\frac{1}{4}$ | 9 | | |
| 2 | 6 | 60 | 10 | | | |
| | 4 | | 100 | 100 | 25 | |
| 4) | | | | | 25 | $6\frac{1}{4}$ Meilen. |

Kommen verkehrte Verhältnisse vor, so müssen die Glieder vor allen Dingen gegeneinander versetzt werden. Z. B.

Von einem Magazine können 15000 Mann 6 Monate ernährt werden, wenn jeder täglich 1 Pfd. 24 Loth = $1\frac{3}{4}$ Pfd. Brod bekömmt. Wären es aber 20000 Mann, welche 7 Monate davon leben sollten, wie viel bekömmt alsdenn ein jeder täglich?

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 4 | 20000 | 15000 | 3 | 3 | |
| | 7 | 7 | 6 | 6 | 3 | |
| 2 | 4 | | $1\frac{3}{4}$ | 7 | | |
| 8) | | | | | 9 | $1\frac{1}{8}$ = 1 Pfd. 4 Lth. |

Wenn die Meste Korn $20\frac{3}{4}$ Batzen kostet, so bekömmt man für 2 Batzen ein Brod von $2\frac{1}{3}$ Pfd. Kostet aber die Meste $32\frac{1}{2}$ Batzen, wie viele Pfund Brod bekömmt man alsdann für 3 Batzen? Hier muß der Getraidepreis versetzt werden, weil man desto weniger Brod für ein gewisses Geld kaufen kann, je höher der Preis des Getraides steigt.

```
        2    ||  2 1/3
     32 1/2  ||  20 3/4
             ||  3
---------------------------
 65 |  2  ||  2  |
    | 65  ||  7  | 83
    |  3  || 83  |  7
  4 |  4  ||  3  |
---------------------------
260         | 581 | 2, 23 . . . . ohngefähr
            | 520 |            2 1/4 Pfd.
            -------
              610
              520
            -------
              900
```

## §. 98.

### Lehrsatz.

Wenn man das Verhältniß einer Münze, eines Maaßes, eines Gewichts u. dergl. gegen ein anderes ausdrücken will; so kann dieses entweder durch 2 Zahlen geschehen, z. B. es verhält sich 1 Carolin zu 1 kr., wie 660 : 1, oder man braucht mehrere Zwischenverhältnisse.

| | | |
|---|---|---|
| 1 Carolin : 1 Laubthlr. | = | 4 : 1 |
| 1 Laubth. : 1 Gulden | = | 165 : 60 |
| 1 Gulden : 1 Xr. | = | 60 : 1 |
| 1 Carolin : 1 Xr. | = | 165. 4 : 1 = 660 : 1 |

Hier werden nach der vorigen Regel die Proportionen zusammengesetzt. Da 1 Laubthlr. und 1 fl. jeder im 1ten und 2ten Gliede vorkommen, so können sie (nach den Regeln des Aufhebens durch Division

sion von gleichen Factoren) weggelassen werden. Eben so wird 60 im 3ten und 4ten Gliede weggelassen.

Da hier eine ganze Reihe von Proportionen zusammenhängt, wo in den vordern Verhältnissen jedes Hinterglied mit dem Vordergliede der folgenden Proportion einerley ist; so heißt diese Rechnung die Kettenregel. Man braucht sie bey solchen Vergleichungen (wie bey Münzen), wo man durch mehrere bekannte Zwischenverhältnisse das unbekannte Hauptverhältniß (wie hier zwischen Carolin und Xr.) aufsucht.

Man will z. B. wissen, wie viele französische Francs auf 1000 Rubel gehen.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 Franc | : 1 Liv. | = | 81 : 80 |
| 1 Liv. | : 1 Carol. | = | 1 : 24 |
| 1 Carol. | : 1 Lbthlr. | = | 4 : 1 |
| 1 Lbthlr. | : 1 fl. | = | 165 : 60 |
| 1 fl. | : 1 Rubel | = | 60 : 108 |

1 Franc : 1 Rubel = (81. 4. 165. 60) : (80. 24. 1. 60. 108)

| Gegeneinander aufgehoben: | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | 9 | 81 | 80 | 16 | 16 |
| | 4 | 4 | 4 | 24 | 24 | 8 |
| | 11 | 33 | 165 | 1 | 1 | 1 |
| | | | 60 | 60 | | |
| | | | | 108 | 12 | 4 |

1 Franc : 1 Rubel = (3. 4. 11) : (4. 16. 8)
= (3. 11) : (8. 16) = 33 : 128.

Also

Also 128 Francs = 33 Rubel.
33 Rubel : 128 Francs = 1000 Rbl. : X Fr.

$$33 \mid 128000 \mid 3878\tfrac{26}{33} = X$$

```
33 | 128000 | 3878 26/33 = X
      99
     ---
      290
      264
      ---
       260
       231
       ---
        290
        264
        ---
         26
```

Wenn man in den Proportionen dieses Beyspiels die Producte der äußern und mittlern Glieder gleich setzt, so erhält man folgende Gleichungen: 80 Francs = 81 Livres, 24 Livres = 1 Carol., 1 Carol. = 4 Laubthlr., 60 Lbthlr. = 165 fl., 108 fl. = 60 Rubel. Wenn wir die gesuchte Zahl, (wie viele Francs auf 1000 Rubel gehen?) X heißen, so haben wir noch eine Gleichung X Francs = 1000 Rubel.

Die kürzeste Art nach der Kettenregel zu rechnen, ist nun folgende. Man setze die Gleichung, worinn das unbekannte X zur linken steht, oben an. Darunter setze man alle andere Gleichungen, doch so, daß diejenige Sorte von Größen, welche in einer Gleichung zur rechten steht, in der gleich darunter gesetzten Gleichung zur linken zu stehen komme, bis daß man endlich auf eine Gleichung kömmt, in welcher dieselbe Sorte von Größen, welche oben bey X steht, zur rechten zu stehen kömmt. (Diese sind hier Francs.) Nun hat man 2 untereinander stehende Reihen

(Co-

(Columnen) von Größen. Die Zahlen beyder Columnen werden gegeneinander aufgehoben, und darauf die übrigbleibenden in jeder Columne besonders miteinander multiplicirt. Dieses giebt 2 Producte. Das zur linken enthält, ausser dem unbekannten Factor X, auch noch einen bekannten. Da beyde Producte gleich sind, so darf man nur mit diesem bekannten Factor auf beyden Seiten dividiren, und man erhält auf der linken Seite des Gleichheitszeichens das X allein, und auf der rechten Seite einen Quotienten in bekannten Zahlen, welcher = X, und also seinen Werth bestimmt.

X Francs = 1000 Rubel
60 Rubel = 108 Fl.
165 Fl. = 60 Laubthlr.
4 Lbthlr. = 1 Carolin
1 Carolin = 24 Livres
81 Livres = 80 Francs

$$X.(60.\ 165.\ 4.\ 81) = 80.\ 24.\ 1.\ 60.\ 108.\ 1000.$$

$$X = \frac{80.\ 24.\ 1.\ 60.\ 108.\ 1000}{60.\ 165.\ 4.\ 81.} = \frac{128000}{33}$$

$$X = 3878\tfrac{26}{33}.$$

Die Geldsorten 1 Rubel gegen 1 Rubel, 1 fl. gegen 1 fl. u. s. w. heben sich als Factoren gegeneinander auf. Also bleiben nur die Zahlen stehen. Wenn man gleiche Größen mit gleichen multiplicirt, so kommen gleiche Producte heraus. Wenn man ferner diese gleiche Producte mit einer und derselben Größe (nämlich dem bekannten Factor zur linken) dividirt, so müssen die Quotienten gleich seyn. Also erhält man

zuletzt

zuletzt X = einer bekannten Zahl. — Es kömmt bey dieser Rechnung alles auf einen richtigen Ansatz an. Auch ist nicht nöthig, die Gleichheitszeichen hinzusetzen, sondern man kann die Zahlen, wie §. 97., zu beyden Seiten eines Strichs setzen, und eben so, wie dort, gegeneinander aufheben.

Noch einige Beyspiele. Wie viele Ducaten machen 100 preußische Thaler, wenn 135 preußische Thlr. 100 holländische Thlr., ferner 2 holländische Thlr. 5 holländische fl., ferner 1 holländischer fl. 20 Stüber, endlich 104 Stüber 1 Ducaten machen?

| | | | |
|---|---|---|---|
| X | X Duc. | 100 pr. Thlr. | 25 |
| 27 | 135 pr. Thlr. | 100 holl. Thlr. | 100 |
| | 2 holl. Thlr. | 5 holl. fl. | |
| | 1 holl. fl. | 20 Stüber | 10 |
| 26 | 104 Stüber | 1 Duc. | |

702 X = 25000

$X = \frac{25000}{702} = 35,6.$ also 100 pr. Thlr. = 35,6 Duc.

Wie viele rheinische Thaler kosten 16 Ballen Papier, wenn 2 Bogen $1\frac{1}{2}$ kr. kosten?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| X | X | X Thlr. | 16 Ballen | 16 | 4 |
| | | 1 Ballen | 10 Rieß | 10 | |
| | | 1 Rieß | 20 Buch | 20 | 20 |
| | 2 | 1 Buch | 24 Bogen | 24 | 8 |
| | 2 | 2 Bogen | $1\frac{1}{2}$ kr. | 3 | |
| | 90 | 90 kr. | 1 Thlr. | | |

X = 4. 8. 20 = 640. Also 16 Ballen kosten 640 Thlr.

Wenn das Pfd. von einer Waare in Amsterdam $7\frac{1}{2}$ Stüber kostet, was kosten

sten davon drey Centner zu 108 Pfd. in Frankfurt in fl.?

7683 amsterd. Pfd. sind = 8152 frankf. Pfd.

| X | X | X | 3 Centner | 3 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 Ctnr. | 108 fr. Pfd. | 108 | 7 |
| 8152 | 8152 | 8152 fr. P. | 7683 amst. P. | 7683 | 7683 |
| | 2 | 1 amst. P. | $7\frac{1}{2}$ Stüber | 15 | 3 |
| 52 | 104 | 104 Stüb. | 1 Duc. | | |
| | 5 | 5 Duc. | 27 fl. | 27 | 27 |

$$X\,(8152.\,52) = 3.\,27.\,7683.\,3.\,27.$$

$$X = \frac{3.\,27.\,7683.\,3.\,27}{8152.\,52.} = 118{,}9 = 118 \text{ fl. } 54 \text{ kr.}$$

## §. 99.

### Erklärung.

Wenn eine Zahl A nach eben dem Verhältnisse in mehrere Theile getheilt werden soll, nach welchem eine andere Zahl B eingetheilt ist; so braucht man die Regel de Tri so oft, als man Theile finden will.

Es habe zum Beyspiel B drey Theile, so verhält sich das ganze B zum ganzen A, wie der erste Theil von B zu dem ersten Theil von A.

Ferner B : A, wie der 2te Theil von B zu dem 2ten Theil von A.

Endlich B : A, wie der 3te Theil von B zu dem 3ten Theil von A.

Man heißt dieses die Gesellschaftsrechnung, wenn mehrere Menschen Geld zusammengeschossen haben, und zuletzt den Gewinn oder Verlust, der aus

ihrem Geschäfte (z. B. Handel, Betreibung eines Bergwerks u. dergl.) erfolgt, nach dem Verhältnisse ihrer Einlagen vertheilen wollen. (Es können darnach auch Erbschaften nach gewissen Verhältnissen vertheilt werden.) Die ganze Einlage verhält sich zum ganzen Gewinne (oder Verluste), wie die einzelnen Theile der erstern zu den einzelnen Theilen des letztern.

Z. B. Drey Kaufleute legen zusammen

der 1te 7000
— 2te 4000
— 3te 3000

14000

Sie gewinnen damit 2800 fl.

Also 14000 : 2800 = 7000
10 : 2 = 7000
5 : 1 = 7000 : 1400.
ferner 5 : 1 = 4000 : 800.
endlich 5 : 1 = 3000 : 600.
1400 = Antheil des 1ten
800 = — — — 2ten
600 = — — — 3ten

Summa 2800.

Zusammengesetzt heißt die Gesellschaftsrechnung, wenn auch die Zeit verschieden ist, während welcher die Capitalien im Handel stecken. Z. B.

Cajus giebt 1000 fl. auf 2 Jahre
Titius — 2000 — — 3 —

Der ganze Gewinnst ist 1200 fl. — Es ist dieses eben so viel, als wenn der erstere 2000 fl., der andere 6000 fl., jeder nur auf 1 Jahr gegeben hätte. Man multiplicire also die Geldsummen mit den Jah-

Jahren, und rechne hernach nach der einfachen Gesellschaftsrechnung.

| | | |
|---|---|---|
| 2000 | 8000 : 1200 = 2000 : X | |
| 6000 | 8 : 12 = 200 : X | |
| 8000 | 2 : 3 = 200 : 300 | |
| | 2 : 3 = 600 : 900 | |

Wenn eine Erbschaft von 90000 fl. unter 3 Erben so vertheilt werden sollte, daß von 12 gleichen Theilen des Ganzen

der 1te bekommen sollte 3 Theile
der 2te — — — 4 —
der 3te — — — 5 —

so wäre 12 : 90000 = 3
1 : 7500 = 3 : 22500
1 : 7500 = 4 : 30000
1 : 7500 = 5 : 37500
90000

Dahin gehören mancherley Arten von Repartitionen. Z. B. Man will wissen, wie viel Cajus in einem Jahre zur Brandcasse beytragen muß, wenn sein Haus zu 3000 fl. an Werth angeschlagen ist. Der Werth aller Gebäude des Landes sey = 10 Mill. fl. — Der Werth der in einem gewissen Jahre abgebrannten Gebäude sey = 40000 fl.

10000000 : 40000 = 3000 : X
1 : 4 = 3 : 12

Eine andere Anwendung ist bey Vertheilungen von Pachten, Zehenden u. dgl. Es haben 4 Personen Theil an einem Zehenden.

Der 1te hat davon zu ziehen $\frac{7}{24}$
Der 2te — — — — $\frac{3}{24}$
Der 3te — — — — $\frac{5}{24}$
Der 4te — — — — $\frac{9}{24}$
Der ganze Ertrag sey = 1200 fl.
Also 24 : 1200 = 7 : 350 u. s. w.

Ferner: Eine Gemeinde soll 400 Achtel Frucht jährlich geben. Es werden 80 Achtel erlassen. Wie viel werden jedem Einzelnen erlassen? Wenn z. B. Titius 3 Achtel geben sollte, so werden ihm $\frac{3}{5}$ Achtel erlassen. Denn

400 : 80 = 3 : $\frac{3}{5}$.

§. 100.

Nach eben diesen Regeln wird auch die Vermischungs-Rechnung geführt. Wenn eine gewisse Mischung aus einzelnen Bestandtheilen a, b, c, d u. s. w. nach einem bestimmten Verhältnisse verfertigt wird; so kann man berechnen, wie viel von jedem einzelnen zu einer größern Portion genommen werden müsse, damit dasselbe Verhältniß bleibe. Z. B.

Zu gutem Schießpulver nimmt man auf 1 Pfund oder 32 Loth

24 Loth Salpeter
6 — Kohlen
2 — Schwefel
―――
32

Wenn davon 50 Pfund gemacht werden sollen, wie viel müßte dazu von den genann-

nannten drey Ingredienzien genommen werden?

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 Pfd. | : | 50 Pfd. | = | 24 Loth | : | 1200 Loth |
| 1 — | : | 50 — | = | 6 — | : | 300 — |
| 1 — | : | 50 — | = | 2 — | : | 100 — |
| | | | | 1600 Lth. | = | 50 Pfd. |

Zu dem großen Hohlspiegel, welchen der berühmte Herschel für sein Fernrohr verfertigte, wurde eine Mischung von mehreren Metallen genommen. Zu 51 Lth. kamen 32 Lth. Kupfer

16 — gekörntes Zinn
1 — Messing
1 — Arsenik
1 — Silber
———
51

Der ganze Spiegel wiegt 1035 Pfund

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Also 51 : 32 | = 1035 : | 649, 412 | Pfd. | Kupfer |
| 51 : 16 | = 1035 : | 324, 706 | — | Zinn |
| 51 : 1 | = 1035 : | 20, 294 | — | Messing |
| | | 20, 294 | — | Arsenik |
| | | 20, 294 | — | Silber |
| | | 1035 | Pfd. | |

Nach andern Nachrichten (z. B. Grens Journal der Physik 3ter Band, 4tes Heft, 1796) wiegt dieser Spiegel 2118 Pfund. Darnach läßt sich die Rechnung leicht abändern.

Fünf-

# Fünfter Abschnitt.

## Von den Reihen und ihrer Anwendung auf die Lehre von den Logarithmen.

§. 101.

### Erklärung.

Jede Verbindung einer Menge von Zahlen, die nach einer gewissen Ordnung (einem Gesetze) ab= oder zunehmen, nennt man eine Reihe (Progression), und die Zahlen selbst, ihre Glieder.

Werden diese von der Linken gegen die Rechte immer größer, so daß das letzte Glied auch das größte ist, so heißt die Reihe steigend, im umgekehrten Falle fallend.

§. 102.

### Folgerung.

Es wird also jede fallende Reihe eine steigende, wenn man sie rückwärts liest, und umgekehrt, und man kann daher alle Lehren von jener auf diese anwenden.

## §. 103.

### Erklärung.

Ist in einer Reihe jedes folgende Glied um gleich viel größer oder kleiner, d. h. sind die Unterschiede zwischen je zwey nächst beysammen stehenden Gliedern allemal gleich, so nennt man sie eine arithmetische Reihe. Z. B. 1, 3, 5, 7, 9, 11 ist eine steigende Reihe, und die Differenz ist 2. Aber 30, 25, 20, 15, 10, 5 ist eine fallende Reihe, deren Differenz = 5.

## §. 104.

### Folgerung.

Hiernach wird man jedesmal eine arithmetische Reihe erhalten, wenn man eine stetige, arithmetische Proportion (§. 76) so fortführt, daß man immer aus dem mittleren (stetigen) Gliede und dem 4ten, eben gefundenen, eine neue Proportion bildet, und nachher alle Proportionen aneinander hängt, jedes Glied aber nur einmal setzt.

Z. B. $1 - 3 = 3 - 5$
$3 - 5 = 5 - 7$
$5 - 7 = 7 - 9$
$7 - 9 = 9 - 11$ rc. geben die steigende arithmetische Reihe
$1 - 3 - 5 - 7 - 9 - 11$ - - - -.

## §. 105.

### Lehrsatz.

Jedes Glied einer steigenden arithmetischen Reihe besteht aus dem ersten Gliede und dem Unterschiede, so viel mal zu jenem addirt, als Glieder vor ihm stehen.

### Beweis.

Das erste Glied einer steigenden arithmetischen Reihe

$$a - b - c - e - f - - - -$$

heißt a, der Unterschied zwischen je zwey nächsten Gliedern d, so erhält man das 2te Glied b, wenn man d zu a addirt, d. i., $b = a + d$; will man das dritte Glied suchen, so muß man zu b (dem 2ten) wieder d addiren, oder es ist $c = b + d$, für b seinen Werth gesetzt, giebt $c = a + d + d = a + 2d$, auf gleiche Weise hat man für das 4te Glied

$$e = c + d = a + 2d + d = a + 3d$$

und für das unbestimmte nte Glied

$$= a + (n - 1) d.$$

## §. 106.

### Folgerung.

Es läßt sich also jede Reihe fortsetzen, so weit man will, und jedes fehlende Glied finden, so bald das erste Glied und die Differenz gegeben sind.

Es

Es sey z. B. das 13te Glied einer Reihe zu suchen, wovon die beiden ersten Glieder 3 und 9 bekannt wären, so hat man den Unterschied $9 - 3 = 6$ zwölfmal zu dem ersten Gliede zu addiren, weil so viel Glieder vor dem 13ten stehen, also das 13te Glied $= 3 + 12 . 6 = 75$.

§. 107.

Lehrsatz.

Die Summe der beiden äussersten Glieder einer Reihe ist immer gleich der Summe zweier anderen Glieder, welche gleich weit von ihnen nach innen (oder von der Mitte der Reihe links und rechts) abstehen.

Beweis.

Die eben genannte Summe bestehet 2mal aus dem ersten Gliede und dem Unterschiede, so viel mal genommen, als Glieder dem letzten vorhergehen §. 105.

Der erste Posten kommt jedesmal vor, welches Paar Glieder man auch nimmt, und der letzte (die Menge von Unterschieden) kann sich nicht ändern, weil immer, indem man an beyden Enden der Reihe links und rechts um gleich viel Glieder gegen die Mitte hereingeht, das linke Glied eben so viele Unterschiede gewinnt, als das rechte verliert.

So

So ist in der Reihe

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, — — —

$2 + 20 = 5 + 17 = 8 + 14 = 11 + 11 = 22$

§. 108.

## Folgerung.

Wenn man daher unter eine arithmetische Reihe dieselbe rückwärts setzt, und die unter einander stehenden Glieder addirt, so erhält man die Summe derselben doppelt.

Z. B. diene die vorige Reihe

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2, | 5, | 8, | 11, | 14, | 17, | 20 |
| 20 | 17 | 14 | 11 | 8 | 5 | 2 |
| 22 | 22 | 22 | 22 | 22 | 22 | 22 |

Hierauf gründet sich die Richtigkeit der Auflösung zur folgenden Aufgabe.

§. 109.

## Aufgabe.

Die Summe einer arithmetischen Reihe von einer bestimmten Anzahl Glieder zu finden.

## Auflösung.

Man addire die beiden äussersten Glieder, und multiplicire diese Summe mit der halben Anzahl aller Glieder.

## Beyspiele.

1) Man will die Summe aller ganzen Zahlen von 1 bis 100 wissen.

Hier ist das 1te Glied = 1
das letzte = 100
die Anzahl der Glieder auch = 100, folglich ihre Summe = (1 + 100). 50 = 5050.

2) Für das Ausgraben eines Brunnens wird für den ersten Fuß 10 kr. bewilligt, für jeden folgenden Fuß tiefer 4 kr. mehr; er ist nach seiner Vollendung 47 Fuß tief, und es fragt sich nun, was die Arbeiter zu erhalten haben?

Das erste Glied ist = 10
der Unterschied = 4
die Anzahl der Glieder = 47, also das letzte Glied = 10 + 46. 4 = 194, und die Summe = (194 + 10). $\frac{47}{2}$ = 4794 kr. = 79 fl. 54 kr.

3) Wieviel Schläge thut eine Uhr in 24 Stunden, wenn sie nur voll (allemal nach Verlauf einer Stunde) schlägt?

4) Es setzt jemand auf eine bestimmte Nummer in ein Zahlenlotto 2 kr., bey jeder folgenden Ziehung 2 kr. mehr. In der 20ten Ziehung erscheint die Nummer, und nun wird

der

der letzte Einsatz 60fach bezahlt. — Man will wissen, wie sich der gesammte Einsatz des Spielenden zu seinem Gewinn verhält?

5) Wieviel Ziegel werden zu einem Dache von 18 Latten erfordert, wenn auf die oberste 2, auf jede folgende 3 mehr nöthig wären?

## §. 110.

## Erklärung.

Eine Reihe, in welcher jedes folgende Glied sein nächst vorhergehendes gleich viel mal enthält, oder allgemein, in welcher jedes folgende Glied um gleich viel mal größer oder kleiner als das vorhergehende ist, wird eine geometrische Reihe genannt, und die Zahl, welche anzeigt, wie vielmal jedes Glied größer oder kleiner, als das vorhergehende ist, Exponent (Quotient) der Reihe.

Z. B. für die geometrische Reihe

1, 3, 9, 27, 81, 243 — — —

ist der Exponent = 3.

Wenn der Exponent größer als 1 ist, so ist die Reihe eine steigende; ist er aber kleiner als 1, also ein ächter Bruch, so ist die Reihe fallend. Die Glieder werden immer

kleiner,

kleiner, aber keins kann = 0 werden, z. B.

$4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ — — —

Hier ist der Exponent = $\frac{1}{2}$.

§. 111.

## Folgerung.

Jede geometrische Reihe ist daher nichts anderes als eine Verbindung von gleichen geometrischen Verhältnissen, so daß allemal drey unmittelbar auf einander folgende Glieder der Reihe eine stetige geometrische Proportion geben.

Aus voriger Reihe hat man

$1 : 3 = 3 : 9$
$3 : 9 = 9 : 27$
$9 : 27 = 27 : 81$ u. s. f.

Man kann sich also die Entstehung der geometrischen Reihe auf ganz ähnliche Weise, wie die der arithmetischen (§. 104.) gedenken.

§. 112.

## Lehrsatz.

Jedes Glied einer geometrischen Reihe besteht aus dem ersten Gliede, so viel mal mit dem Exponenten multiplicirt, als Glieder voranstehen.

## Beweis.

Da eine geometrische Reihe aus gleichen geometrischen Verhältnissen besteht (§. 111.) und man (§. 73.) das nachfolgende Glied

eines

eines Verhältnisses findet, wenn man das vorhergehende mit dem Exponenten multiplicirt, in einer Reihe aber jedes Glied (das erste ausgenommen) in Beziehung auf sein nächst vorhergehendes ein nachfolgendes ist, so entstehet das 2te Glied, wenn das 1ste einmal mit dem Exponenten multiplicirt wird — das 3te, wenn das 1ste 2mal, überhaupt das nte Glied, wenn das 1ste (n — 1) mal mit dem Exponenten multiplicirt wird.

Nennt man z. B. das erste Glied der Reihe a, den Exponenten e, so hat man

| Nr. des Gliedes. | Größe desselben. | |
|---|---|---|
| 1 | $= a$ | $= a$ |
| 2 | $= ae$ | $= ae$ |
| 3 | $= aee$ | $= ae^2$ |
| 4 | $= aeee$ | $= ae^3$ |

$a = 1$, $e = 4$ gesetzt, gibt für das

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1te | 1 | $= 1$ | $= 1$ |
| 2te | 1. 4 | $= 1.4$ | $= 4$ |
| 3te | 1. 4. 4. | $= 1.4^2$ | $= 16$ |
| 4te | 1. 4. 4. 4 | $= 1.4^3$ | $= 64$ |

u. s. w.

§. 113.

## Folgerung.

Man kann daher jede geometrische Reihe so weit fortsetzen, als man will, und jedes fehlende Glied finden, wenn das

das erste Glied und der Exponent gegeben sind.

Es sey das 8te Glied der Reihe
3, 6 — — — zu suchen. Hier gehen 7 Glieder vorher; es muß folglich das erste Glied = 3 siebenmal mit dem Exponenten = 2 multiplicirt werden. Dieses gibt das 8te Glied = 3. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2 = 3. $2^7$ = 3. 128 = 384.

## §. 114.

### Lehrsatz.

Wenn man die beiden äussersten Glieder einer Reihe oder zwey gleich weit — von ihnen nach innen oder von der Mitte links und rechts — abstehende Glieder mit einander multiplicirt, so sind die Producte immer gleich groß.

### Beweis.

Es sey die Reihe gegeben,

a ae $ae^2$ $ae^3$ $ae^4$ $ae^5$ $ae^6$

a, ae, aee, aeee, aeeee, aeeeee, aeeeeee

so ist das Product der beiden äussersten Glieder = a. $ae^6$ = $a^2$. $e^6$ = aaeeeeee, oder es besteht aus acht Factoren, wovon zwey = a = dem ersten Gliede, die übrigen sechs = e = dem Exponenten sind. Die beyden ersten Factoren (aa) werden allemal vorkommen müssen, weil jedes Glied a enthält; die

die Menge der andern aber (sechs e) kann sich nicht ändern, weil immer, indem man links und rechts um gleich viel Glieder hereingehet, nothwendig das linke Glied eben so viel Factoren (alle $=$ e) mehr erhält, als das rechte verliert. §. 112.

So ist z. B. in der Reihe

5, 15, 45, 135, 405, 1215, 3645

5. 3645 $=$ 15. 1215 $=$ 45. 405 $=$ 135. 135 $=$ 18225.

## §. 115.

## Aufgabe.

Die Summe einer geometrischen Reihe zu finden.

## Auflösung.

Man multiplicire das letzte Glied mit dem Exponenten, ziehe von diesem Producte das erste Glied ab und dividire dann den Rest durch den Exponenten, wenn man ihn vorher um eins verkleinert hat.

## Beweis.

Es sey die geometrische Reihe von fünf Gliedern

a, ae, aee, aeee, aeeee

und ihre Summe $=$ S gegeben, oder es sey

$$S = a + ae + aee + aeee + aeeee$$

so kann sich die Gleichung nicht ändern, wenn

man alles links und rechts mit e multiplicirt (§. 8.) und dadurch erhält man

es wird alles richtig bleiben, wenn man hiervon die erste zu addirende Reihe links und rechts abzieht,

$$eS = ae + aee + aeee + aeeee + aeeeee,$$

$$S = a + ae + aee + aeee + aeeee,$$

dann bleibt $eS - 1.\,S = aeeeee - a$,

links e mal S weniger 1 mal S,; rechts aber konnte man oben und unten die gleich großen Glieder gegeneinander wegstreichen, so daß oben aeeeee übrig blieb und unten a, was denn noch von ersterem abzuziehen war. —

Mit diesem Ausdruck kann man wieder Veränderungen vornehmen, ohne daß sich sein Werth ändert (§. 8.); es ist

$$eS - 1S = aeeeee - a$$

oder $(e-1)S = aeeeee - a$

nun rechts und links mit

e — 1 dividirt, gibt $\frac{e-1}{e-1} S = \frac{aeeeee - a}{e-1}$

oder $S = \frac{aeeeee - a}{e-1}$

Vergleicht man nun diesen Ausdruck mit der ersten gegebenen Reihe und drückt man ihn in Worten aus; so erhält man die oben gegebene Regel für das Finden der Summe einer geometrischen Reihe.

## Beyspiele.

1) Es wird die Summe = S der Reihe 1 + 4 + 16 bis zum zehnten Gliede inclus. gesucht.

Zuerst berechne man das letzte oder 10te Glied; dieses ist gleich dem ersten Gliede = 1 mit dem Exponenten = 4 neunmal multiplicirt — weil so viele Glieder vorhergehen,

$= 1 . 4^9 = 262144.$

| | |
|---|---|
| multiplicirt mit dem Exponenten | = . . 4 |
| gibt . . . . | 1048576 |
| abgezogen das erste Glied = . . . | 1 |
| läßt . . . . . | 1048575 |
| dividirt durch den um eins verkleinerten Exponenten . . . | = 3 |
| gibt . . . . | 349525 |

= der gesuchten Summe der Reihe.

2) Dem

2) Dem Indier Sessa bewilligte sein König für die Erfindung des Schachspiels eine Belohnung so groß er sie wolle.

Dieser verlangte für das erste Feld des Schachbrets, (deren 64 sind) ein Korn, gleichgültig, von welchem Getraide, — für das zweyte Feld 2 Körner, für das dritte 4 u. s. f. Es fragt sich, wie groß die Zahl der Körner ist?

Das letzte Glied ist gleich dem ersten 63 mal mit dem Exponenten multiplicirt = $1 . 2^{63}$; dieses dann wieder mit dem Exp. mult. wird = 18''' 446744'' 073709, 551616, hiervon das erste Glied = 1 abgezogen und durch den Exponenten 2 weniger 1 = 1 dividirt, giebt die nähmliche Zahl Körner, eins weniger.

Man hat berechnet, daß kein Berg so breit und so hoch auf unserer Erde ist, als der Fruchthaufen würde, wenn man alle Körner auf einander schüttete.

3) Ein Roßkamm verkauft ein Pferd so, daß ihm für den ersten Nagel im Huf ein Pfennig, für den zweyten 2 Pfennig und so fort für jeden folgenden das Doppelte des Vorhergehenden bezahlt werde; wie theuer kommt das Pferd?

Jeder Huf bekommt 8 Nägel, es sind also 32 zu bezahlen und so viel Glieder hat die Reihe; die Summe S ist daher $= \frac{(1 . 2^{31} . 2) - 1}{2 - 1}$

$= 4294{,}967295$ Pf.

$= 17{,}895697$ fl.

§. 116.

## Anmerkung.

Man sieht gleich, daß im gemeinen Leben die Berechnung einer geometrischen Reihe wohl nicht vorkommen wird, das Summiren einer arithmetischen Reihe aber öfter verlangt werden kann; indessen sind beyde für den Mathematiker gleich wichtig und besonders ist hier ihre Vorgleichung interessant, weil man daraus die Lehre von den Logarithmen herleitet, wie gleich erhellen wird.

§. 117.

## Erklärung.

Das Verhältniß zweyer zunächst auf einander folgenden Glieder einer arithmetischen oder geometrischen Reihe, nennt man das **Grundverhältniß** (Basis) der Reihe, oft auch schlechthin **Verhältniß der Reihe.**

So ist z. B. in der arithmetischen Reihe

1, 3, 5, 7, 9, 11 — — — —

das

das Grundverhältniß = 1 — 3, denn alle folgende sind ihm gleich, man hat

7 — 9 = 1 — 3

9 — 11 = 1 — 3 ꝛc.

In der geometrischen Reihe

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 — — — — —

ist das Grundverhältniß = 1 : 2, weil sich alle andere 2 : 4, 4 : 8, 32 : 64 ꝛc. so verhalten.

## §. 118.

## Lehrsatz.

Das Verhältniß irgend zweyer Glieder einer Reihe ist aus so vielen Grundverhältnissen zusammengesetzt, als einzelne Verhältnisse zwischen ihnen liegen.

## Beweis.

1) Für die arithmetische Reihe.

Zwischen den beyden Gliedern 5 und 15 z. B., aus der Reihe

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 — — —

liegen fünf einzelne Verhältnisse

5 — 7 = 1 — 3

7 — 9 = 1 — 3

9 — 11 = 1 — 3

11 — 13 = 1 — 3

13 — 15 = 1 — 3,

es wurde daher auch der Unterschied bis zu der

Zahl

Zahl 15 von 5 an fünfmal addirt, weswegen dann das Verhältniß zwischen 5 und 15 fünfmal so groß seyn muß, als das zwischen 1 und 3, wo der Unterschied nur einmal addirt ist, oder es muß aus dem fünffachen Grundverhältniß 1 — 3 entstanden seyn.

Dieses siehet man auch leicht so ein, wenn man jene 5 Verhältnisse wirklich zusammensetzt (addirt) oder weil diese alle einander und dem Grundverhältnisse gleich sind, dieses fünfmal nimmt,

$$\begin{array}{r} 1 - 3 \\ 5 \quad 5 \\ \hline \text{giebt } 5 - 15 = -10 \end{array}$$

Hätte man zu beyden Gliedern des Verhältnisses gleich große Zahlen addirt, so würde dieses unverändert geblieben seyn (§. 74.), hier aber hat man zu dem 2ten immer um den Unterschied mehr addirt, und deswegen ist es durch die Zusammensetzung gewachsen.

2) Auf ähnliche Weise läßt sich für die geometrische Reihe darthun, daß z. B. das Verhältniß von 4 : 64 aus der Reihe

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 — — —

gleich ist dem vierfachen Grundverhältniß der Reihe 1 : 2 oder daß es aus 4 einzelnen Verhältnissen (so viel hier nämlich zwischen den

beyden

beyden Gliedern 4 und 64 liegen) zusammengesetzt ist; weil bis zu 64 von 4 an viermal mit dem Exponenten = 2. 2. 2. 2 = 16 multiplicirt wurde, bey jenem (dem Grundverhältniß) nur einmal = 2, also dort auch der Exponent 2. 2. 2 = 8 mal so groß wurde.

Schreibt man die 4 zwischen liegende Verhältnisse unter einander und setzt man sie zusammen (multiplicirt man die unter einander stehende Glieder miteinander) so erhält man

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 : | 8 = 1 : 2 | | |
| 8 : | 16 = 1 : 2 | | |
| 16 : | 32 = 1 : 2 | | das neue |
| 32 : | 64 = 1 : 2 | | Verhältniß |

$16384 : 262144 = 1 : 16 = 1 : 2^4$

dieses kann aber nur dadurch verändert worden (gewachsen) seyn, (§. 74.) daß man das zweyte Glied jedesmal mit einer um einen Factoren (den Exponenten) größeren Zahl als das erste multiplicirt hat und zwar viermal.

Dasselbe Raisonnement, welches man hier in 1 und 2 auf die bestimmten Beyspiele angewendet hat, wird aber für jeden andern Fall geführt werden können, und so wäre denn der Lehrsatz allgemein.

§. 119.

## §. 119.

### Folgerung.

Wenn man unter irgend eine geometrische Reihe, deren erstes Glied 1 ist,

z. B. diese 1, 10, 100, 1000, 10000 --

eine arithmetische, welche mit 0 anfängt und aus den natürlichen Zahlen besteht, setzt, so 0, 1, 2, 3, 4 -- zeigen die Glieder der letztern allemal an, aus wie vielen Grundverhältnissen jedes Glied der obern Reihe, wenn man es mit dem ersten vergleicht, zusammengesetzt ist. Es werden daher die Glieder der arithmetischen Reihe die Logarithmen (Verhältnißzähler) von den Gliedern der geometrischen Reihe genannt, letztere aber schlechthin Zahlen, die Verbindung zweyer solcher Reihen ein logarithmisches System, und das Verhältniß der beyden ersten Glieder der geometrischen Reihe die Basis des logarithmischen Systems.

## §. 120.

### Anmerkung.

Man kann der logarithmischen Systeme unzählig viele bilden, so wie man immer mit der nähmlichen arithmetischen Reihe (denselben Logarithmen) eine andere geometrische (andere Zahlen) verbindet.

Ein Schottländischer Baron, Joh. Nepper, soll 1614 diese merkwürdige Eigenschaft an der Verbindung

dung einer geometrischen Reihe mit einer arithmetischen entdeckt, und seine Bemerkungen dem Heinr. Brigg, Prof. der Mathematik zu Oxford, mitgetheilt haben, der alles weiter ausführte und dann das so eben als Beyspiel gebrauchte System bekannt machte, was man auch jetzo noch nach ihm das Briggische (oft auch das Gemeine) nennt und auch fast allgemein braucht.

## §. 121.

### Lehrsatz.

Wenn vier Zahlen eines logarithmischen Systems geometrisch proportional sind, so sind ihre Logarithmen arithmetisch proportional.

### Beweis.

Vier Zahlen sind geometrisch proportional oder stehen in geometrischer Proportion, wenn die Producte aus den beyden äußeren und den beyden mittleren Gliedern gleich groß sind (§. 83.) Dieß wird aber hier allemal der Fall seyn, wenn die Glieder der geometrischen Reihe gleich weit vom Ende und Anfang der Reihe abstehen (§. 114.), dann sind aber auch die unter ihnen stehende Glieder der arithmetischen Reihe (die Logarithmen) gleich weit von einander entfernt, geben gleiche Summen (§. 107.) und bilden daher eine arithmetische

metische Proportion (§. 78.) Z. B. in dem folgenden logarithmischen Systeme

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, | 2, | 4, | 8, | 16, | 32, | 64, | 128 |
| 0, | 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7 |

hat man die Zahlen $2 : 8 = 16 : 64$
die Logarithm. $1 - 3 = 4 - 6$

§. 122.

### Lehrsatz.

Der Logarithme eines Products ist gleich der Summe der Logarithmen seiner Factoren.

### Beweis.

1) Für zwey Factoren erhellet leicht die Richtigkeit des Satzes aus §. 84., wo gezeigt ist, wie man allemal aus 2 Factoren und ihrem Producte eine geometrische Proportion bilden, folglich sie als Glieder einer geometrischen Reihe ansehen kann (§. 111 und 114.) deren Logarithmen arithmetisch proportional sind, z. B. $x = 4. 16$ gibt die Proportion $1 : 4 = 16 : x$
hiezu die Logarithmen aus
vorigem System §. 121. $0 - 2 = 4 - 6$
log. von $4 = 2$
log. $16 = 4$

der log. des Prod. 4. 16 ist gleich 6; sucht man in dem System den log. 6 auf, so steht die

die zugehörige geometrische Proportionalgröße (das gesuchte Product) 64 oben darüber.

2) Bey mehreren Factoren, z. B. a. b. c d suche man wie vorhin zuerst den log. von zweyen Factoren, etwa von a und b, so hat man den log. des Products aus ihnen, nähml. log. a + log. b = log. ab.

ab läßt sich aber selbst wieder als Factor ansehen und man muß daher den log. des Products aus den drey Factoren abc erhalten, wenn man zu log. ab addirt log. c. Nun kann dieser Schluß so fort auf noch so viele Factoren gemacht werden und der Satz ist also allgemein.

Z. B. 2. 4. 16 = x gibt (§. 121.)

log. 2 + log. 4 + log. 16 = log. x.

1 + 2 + 4 = 7 = dem log. von 128, wie gehörig.

## §. 123.

## Folgerung.

Da es nichts ändern kann, ob diese Factoren unter sich ungleich oder alle gleich groß sind, in letzterem Falle aber ein und derselbe Logarithme mehrmals zu sich addirt würde, so folgt hieraus, daß man den Logarithmen einer Potenz (§. 56.) finde, wenn man den Logarithmen der Wurzel mit dem Exponenten (derjenigen Zahl, welche oben zur Rech-

ten

ten der Wurzel gesetzt wird, und anzeigt, aus wieviel (der Wurzel) gleichen Factoren die Potenz besteht) multiplicirt. Z. B. log. (8. 8) = log. $8^2$ = 2 log. 8 = 2. 3 = 6 = log. 64.

log. $2^7$ = 7 log. 2. = 7, 1 = 7 = log. 128.

§. 124.

Lehrsatz.

Der Logarithme eines Quotienten ist gleich der Differenz des Logarithmen des Dividenden und des Divisors.

Beweis.

Jeden Quotienten kann man (§. 84.) als die vierte geometrische Proportionalgröße zu dem Divisor, Eins und dem Dividenden ansehen, folglich den Logarithmen des Quotienten als die 4te arithmetische Proportionalgröße zu den log. des Divisors, der Einheit und des Dividenden (§. 121.), woraus der Satz fließt.

Z. B. 128 : 8 = x, giebt

8 : 1 = 128 : x

log. 3 − 0 = 7 − 4, es ist

0 + 7 − 3 = 4 = log. x = log. 16.

Dieses

Dieses läßt sich aber auch so herleiten:

es ist $x, = 128 : 8.$

oder $x . 8 = 128,$ also vermöge §. 122. $\log. x + \log. 8 = \log. 128$

links und rechts

l. 8 abgezogen $- \log. 8 \qquad - \log. 8$

giebt $\log. x = \log. 128 - \log. 8$

## §. 125.

### 1te Folgerung.

Der log. eines Bruchs ist daher gleich der Differenz zwischen dem log. des Zählers und dem des Nenners. (§. 25.)

$$\log. \tfrac{64}{128} = \log. 64 - \log. 128 = 6 - 7 = - 1$$

## §. 126.

### 2te Folgerung.

Der Logarithme der Wurzel einer Potenz (§. 36.) ist gleich dem Logarithmen der Potenz, dividiret durch den Exponenten.

Dieses ist der umgekehrte Satz im §. 123. und läßt sich daraus so herleiten.

Es war dort $\log. 8^2 = 2 \log. 8$

oder $\log. 64 = 2 \log. x,$

links

links und rechts mit 2 dividirt, ändert die Gleichung nicht und man hat - - - $\frac{\log. 64}{2} = \frac{2 \log. x}{2}$

$$\frac{\log. 64}{2} = \log. x$$

gleich dem Logarithmen der gesuchten Wurzel.

Ferner sey $A = x^3$, also die Cubik-Wurzel $= x$ zu suchen, so hat man

$$\log. A = 3 \log. x.$$

und $\frac{\log. A}{3} = \log. x$

## §. 127.

### Anmerkung.

Man siehet aus dem Vorhergehenden den großen Vortheil der Rechnung mit Logarithmen ein, indem sich das gemeine Multipliciren in eine gewöhnliche Addition, das Dividiren in eine leichte Subtraction, das umständliche Potenziren und Wurzelausziehen aber in ein kleines Multiplications- und Divisions-Exempel verwandeln läßt.

Es kam hiebey nur darauf an, Tabellen zu verfertigen, in welchen man auf eine leichte und bequeme Art zu jeder gegebenen Zahl den zugehörigen Logarithmen — und zu jedem gegebenen Logarithmen die zugehörige Zahl finden konnte. Denn wenn man

das

das schon oben §. 119. angeführte Briggische System

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 100 | 1000 | 10000 . |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

betrachtet, so bemerkt man, daß zwischen je zwey Gliedern der geometrischen Reihe immer mehr und mehr Zahlen fehlen, und doch wird man in den wenigsten Fällen gerade mit solchen aus dieser Reihe zu rechnen haben. Indessen gehört es nicht für diese ersten Anfangsgründe, zu zeigen, wie man im Stande war, durch Interpoliren und in neueren Zeiten durch Kunstgriffe der höheren Rechenkunst alle jene fehlende Glieder beider Reihen (Zahlen und Logarithmen) zu finden, und so die Tabellen zu bilden, die man von Vlacq, Wolf, Schulze, Vega u. a. m. erhalten hat, deren Gebrauch sich leicht aus der jedesmaligen Einleitung zu denselben und der Einrichtung selbst ergiebt. Nur darauf will man hier noch aufmerksam machen.

Wenn man auf obiges System noch einmal zurück sieht, so entdeckt man folgende merkwürdige Eigenschaften an ihm:

1) Die kleinste ganze Zahl = 1 hat 0 zu ihrem Logarithmen, es müssen also alle Zahlen, die weniger als 1 betragen (alle ächten Brüche) weniger als Null, d. h. negative Größen zu ihren Logarithmen haben, wie dies schon aus dem Beyspiele §. 125. erhellet.

2) Alle Zahlen, welche aus 1 mit angehängten Nullen bestehen, haben ganze Zahlen zu ihrem Logarithmen,

rithmen, so daß diese nur bey den 10mal größern Zahlen um eine Einheit wachsen. Es müssen also auch alle Zahlen zwischen 10 und 100, 100 und 1000 ꝛc. Logarithmen haben, die zwischen 1 und 2, 2 und 3 ꝛc. fallen, d. i. alle jene Zahlen werden Logarithmen haben, welche aus einer ganzen Zahl, Kennziffer, Charakteristik genannt, und einem angehängten Bruche — Mantisse, der in den Tafeln gewöhnlich als Decimalbruch bis auf sieben Stellen angegeben ist, bestehen. Die Logarithmen der Zahlen unter 10 aber werden nur Brüche enthalten.

3) Da nach 1 und 2 alle Logarithmen entweder negative oder positive Größen sind und sich auch keine andere denken lassen, die zugehörigen Zahlen aber allemal positiv sind, so können für negative Zahlen keine Logarithmen Statt finden.

---

Anhang.

# Anhang.

## Einige Aufgaben zur Uebung.

### I. Zum ersten Abschnitt.

1. Friedrich der Zweyte, der große König von Preußen, war geboren 1712 und wurde 74 Jahre alt. Wann starb er?

2. Der menschliche Körper enthält folgende Knochen: der Hirnschädel 8, das Gesicht 14, das Gehör 8, die Zähne 32, das Zungenbein 1, die Wirbelbeine des Rückgrads 24, die Rippen 24, das Brustbein 1, der Kreuzknochen 1, das Steißbein 1, das Becken 2, die Schlüsselbeine 2, Schultern und Oberarme 4, die Unterarme 4, die Handwurzeln 16, die Mittelhände 10, die Fingerknochen 32, die Ober- und Unterschenkel und Kniescheiben 8, die Fußwurzeln 14, die untern Füße 42.

3. Der Flächeninhalt der fünf Welttheile wird in deutschen Quadratmeilen ungefähr auf folgende Art angegeben: Europa 162000, Asien 620000, Afrika 530000, Amerika 600000, Südindien 160000.

4. Sieben Monate des Jahres haben jeder 31 Tage, der Februar in einem gemeinen Jahre 28, in einem Schaltjahre 29, die Monate April, Junius, September und November haben jeder 30 Tage. Wie viele Tage hat das gemeine Jahr? wie viele das Schaltjahr?

5. Der höchste Berg in der Welt, Chimboraço in Südamerica, ist 19320 pariser Schuh hoch. Der Brocken im Harz 3270. Wie viel ist der erstere höher?

6. Der westphälische Friede wurde 1648 geschlossen. Wie lange ist dieses jetzo 1805?

7. Der Mond hat 465 deutsche Meilen im Durchmesser, die Erde 1719. Wie viele hat die Erde mehr als der Mond?

8. Die Sonne hat 193893 d. M. im Durchmesser. Wie viele mehr als die Erde?

9. Amerika wurde 1492 von Columbus entdeckt. Wie lange ist dieses im Jahre 1805?

10. Deutschland enthält 11120 deutsche Quadratmeilen, Spanien 8500. Wie viel ist letzteres kleiner?

11. Wenn auf jeder Q. Meile, deren das ganze feste Land der Erde 2072000 hat, 3000 Menschen lebten, wie viele wären es alsdann?

12. Wie vielmal mehr wären dieses, als jetzo, da man ohnfähr 1200 Millionen rechnet?

13. Man kann im Durchschnitte 75 Pulsschläge bey einem gesunden Menschen auf eine Minute rechnen. Wie viele kommen davon auf ein Jahr? (das Jahr zu 365 Tagen und 6 Stunden gerechnet.)

14. Ein Reisender, der täglich 4 Meilen zurücklegt, kann in 21 Tagen von Frankfurt nach Wien reisen. Wie weit ist dieser Weg?

15. In einer Stadt wurden in einem Jahre 3600 Menschen gebohren. Wenn man die Zahl der Lebenden überhaupt 25 mal größer als die Zahl der Neugebohrnen annimmt, wie viele Menschen leben in dieser Stadt?

16. Der Schall geht mit einer Geschwindigkeit von 1078 Fuß in einer Secunde. Wenn man während der Zeit, die zwischen Blitz und Donner verfließt, 8 Secunden zählen kann, wie weit ist die Gewitterwolke entfernt?

17. Wie viele Secunden kann man zwischen dem Scheine einer losgebrannten Kanone und dem Knalle zählen, wenn dieselbe eine

deutsche Meile (ohngefähr 23600 Fuß) entfernt ist?

18. Wenn Jemand in einem Jahre 100 Fl. und in jedem folgenden Jahre doppelt so viel, als in dem vorhergehenden Jahre, einnehmen sollte; wie viel würde er im 10ten Jahre bekommen?

19. Ein Naturforscher nahm an, daß es 13000 Arten von Pflanzen und 7750 Arten von Thieren auf der Erde gebe. Für jede Pflanzenart nahm er 5, für jede Thierart 2 Arten von Insekten an, welche darauf zu ihrer Erhaltung angewiesen sind. Wie viel Insektenarten nahm er überhaupt an?

20. Die große Glocke in Erfurt wiegt 275 Centner. Wenn man den Centner zu 108 Pfd. und jedes Pfd. an Werth zu 45 Xr. rechnet, wie viele Rthlr. ist die ganze Glocke werth?

21. Wenn man von der Höhe eines Bergs auf allen Seiten gegen 16 deutsche Meilen sehen kann, so ist der Raum, den man übersehen kann, ohngefähr 800 Quadratmeilen groß. Den wievielsten Theil von Deutschland, welches 11120 Quadratmeilen enthält, kann man daselbst übersehen?

22. Wie vielmal ist der Montblanc in Savoyen, der 14000 Fuß über der Meeresfläche erhaben ist, höher, als der Feldberg bey Frankfurt, welcher 2800 Fuß hoch ist?

23. Von 30 Menschen stirbt im Durchschnitte jährlich 1, wie viele sterben im Jahre von den 1200 Millionen, die auf der Erde leben?

24. Wie viele in einem Tage? einer Stunde? einer Minute? einer Secunde?

25. Man rechnet die Bevölkerung von Deutschland auf 25 Millionen Menschen. Wie viele leben im Durchschnitt auf einer Quadratmeile, da es im Ganzen 11120 Quadratmeilen hat?

26. Man rechnet in London 1,035000 Menschen und 125000 Häuser. Wie viele Menschen auf ein Haus?

27. Wie viele in Paris, wo 700000 Menschen und 24000 Häuser sind?

28. Wie viele in Amsterdam, wo 250000 Menschen und 27000 Häuser sind?

29. In einer Stadt kostete das Oel zu den Straßenlaternen

im

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| im September | 1 Ctr. | 105 Pfd. | 10 Lth. | = Quint |
| — October | 4 — | 28 — | 1 — | 2 — |
| — November | 4 — | 42 — | 26 — | 2 — |
| — December | 4 — | 48 — | 23 — | = — |
| — Jänner | 4 — | 61 — | 16 — | 2 — |
| — Februar | 4 — | 11 — | 10 — | 2 — |
| — März | 3 — | 96 — | 2 — | = — |
| — April | 3 — | 70 — | = — | = — |

30. An einer vier und zwanzig pfündigen Kanone kostet in Frankreich

| | | |
|---|---|---|
| 1) das Metall . . . | 3420 fl. | — kr. |
| 2) die Form und der Guß . | 416 = | — = |
| 3) das Zündloch zu bohren | 45 = | — = |
| 4) die Wände und Riegel der Laffete . . . | 13 = | 56 = |
| 5) die Räder . . . | 13 = | 4 = |
| 6) der Eisenbeschlag . . | 59 = | 24 = |
| 7) das Holz zum Protzwagen | 10 = | 48 = |
| 8) der Beschlag an demselben | 16 = | 12 = |
| 9) das Anstreichen . . | 2 = | 40 = |
| 10) die Ladeschaufel . . | 4 = | 4 = |
| 11) der Setzkolben, Wischkolben und Zieher . . | 1 = | 40 = |

31. Was betragen folgende Geldsorten im rheinischen Gelde:

12 Stück

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12 Stück Carolins | = | 132 fl. | — kr. |
| Agio | = | — ≈ | 48 ≈ |
| 20 — alte Louisd'or jeder zu 9 fl. 24 kr. | = | 188 ≈ | — ≈ |
| 45 — Laubthlr. | = | 123 ≈ | 45 ≈ |
| 12 — Kronenthlr. | = | 32 ≈ | 24 ≈ |

32. Ein rheinländischer Cubikfuß reines Wasser wiegt 65 Pf., 29 Loth, 3 Quint, 54 Gran. Eben so viel Menschenblut wiegt 68 Pfd., 18 Loth, 1 Quint, 30 Gran. Wie viel ist dieses schwerer, als Wasser?

33. Ein Sonnenjahr beträgt 365 Tage, 5 Stunden, 48 Minuten, 48 Secunden; ein Mondjahr 354 Tage, 8 St., 48 Min., 38 Sec. Wie groß ist der Unterschied?

34. Die Oberfläche der ganzen Erde beträgt 9282600 Quadratmeilen; die Oberfläche des festen Landes 2072000 Quadratmeilen. Wie viele beträgt das Wasser?

35. Der Doctor Luther wurde gebohren 1483 den 10. November, er starb 1546 den 18. Febr. Wie alt wurde er?
von 1546 Jahr., 1 Mon., 18 Tag. ziehe man
ab 1483 — 10 — 10 —

36. Es sind 56 Francs = 25 fl. 59 kr. 1 hl.
ferner 8 — = 3 ≈ 42 ≈ 3 ≈
Wie viel betragen 48 Francs?

37. Wie viele Secunden hat Doctor Luther gelebt? (siehe 35. Aufgabe) Ein Jahr ist lang 365 Tage, 5 Stunden, 48 Minuten, 48 Secunden.

38. Um einen Cubikfuß brennbare Luft zu bereiten, braucht man 12 Loth Eisenfeilspäne, 12 Loth Vitriolöl und 1 Pfd. 28 Loth Wasser. Wie viel brauchte man von jedem dieser Stücke, um den 1783. den 1ten December zu Paris verfertigten Luftball zu füllen, der 9639 Cubikfuß groß war.

39. Ein gewisser Italiener, Cornaro, der über 100 Jahre alt wurde, genoß täglich 24 Loth an Essen, 28 Loth an Getränke. Wie viel beträgt dieses in einem Jahre?

40. Ein Cubikfuß Buchenholz wiegt grün 64 Pfd. 3 Quint, trocken 39 Pfd. 1 Loth. Wenn ein Klaffter = 144 Cubikfuß, welches aber wegen der leeren Zwischenräume ohngefähr nur 100 Cub. F. enthält, wie schwer ist dasselbe grün, und trocken?

41. Da der Schall in einer Secunde 1078 pariser Fuß durchgeht, wie lange braucht er

er auf 10 Meilen, jede Meile = 22842 pariser Fuß?

42. Wie viele Centner wiegt die englische Nationalschuld von 500 Millionen Pfd. Sterling, das Pfd. Sterling zu 11 fl. gerechnet, wenn man sie in Laubthalern, jeden 2 Loth schwer, bezahlen wollte?

43. Wie viele Pferde brauchte man dazu, um sie wegzufahren, wenn jedes Pferd eine Last von 10 Centnern ziehen kann?

44. Die Laufbahn der Erde um die Sonne beträgt an deutschen Meilen 129626823. Die Zeit eines Jahres, in welcher sie diese Laufbahn vollendet, beträgt 31556928 Secunden. Wie viele Meilen und Fuß legt sie in einer Secunde zurück, die Meile zu 22842 pariser Fuß gerechnet?

45. Ein rheinländischer Cubikfuß Meerschaum wiegt 22 Pfd., 4 Loth, 3 Quint, 48 Gran. Wie viel wiegt davon ein rheinländischer Cubikzoll?

## II. Zum zweyten Abschnitte.

46. Ein Körper, welcher ungehindert fallen kann, fällt

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| in der 1ten Secunde | . | $15\frac{5}{8}$ | rheinl. | Fuß |
| — — 2ten — | . | $46\frac{7}{8}$ | — | — |
| — — 3ten — | . | $78\frac{1}{8}$ | — | — |
| — — 4ten — | . | $109\frac{3}{8}$ | — | — |
| — — 5ten — | . | $140\frac{5}{8}$ | — | — |
| — — 6ten — | . | $171\frac{7}{8}$ | — | — |

Wie tief wird er in 6 Secunden gefallen seyn?

47. Als man einmal in Amsterdam einen Brunnen graben wollte, so fand man folgende Erdschichten übereinander:

| | | |
|---|---|---|
| 1) schwarze Gartenerde . . | $\frac{7}{10}$ | Ruthen |
| 2) Torf . . . . . | $\frac{9}{10}$ | — |
| 3) weichen Thon . . . | $\frac{9}{10}$ | — |
| 4) Sand . . . . . | $\frac{4}{5}$ | — |
| 5) Gartenerde . . . . | $\frac{2}{8}$ | — |
| 6) Thon . . . . . | 1 | — |
| 7) Erde . . . . . | $\frac{2}{5}$ | — |
| 8) Sand . . . . . | 1 | — |
| 9) Thon . . . . . | $\frac{1}{5}$ | — |
| 10) weißen Sand . . . | $\frac{2}{5}$ | — |
| 11) trockne Erde . . . . | $\frac{1}{2}$ | — |
| 12) Morast . . . . | $\frac{1}{10}$ | — |
| 13) Sand . . . . . | $1\frac{2}{5}$ | — |
| 14) Sand mit Lehm . . . | $\frac{3}{10}$ | — |
| 15) Sand mit Thon . . . | $\frac{1}{2}$ | — |

16)

16) Thon . . . . $10\frac{1}{5}$ Ruthen
17) Seemuscheln . . . $\frac{2}{5}$ —

Die letzte Lage verrieth den ehemaligen Meeresgrund. Wie tief war diese unter der Oberfläche der Erde?

48. Dadurch, daß alle 4 Jahre ein Tag eingeschaltet wird, wird jedes Jahr zu $365\frac{1}{4}$ Tagen angenommen. Das Jahr hält aber genau $365\frac{109}{450}$ Tage. Um wie viel zu groß wird also das Jahr angenommen?

49. Ein Cubikfuß fest zusammengebundenes Stroh wiegt $8\frac{8}{33}$ Pfd., lose zusammengebunden nur $3\frac{23}{47}$ Pfd. Wie viel ist auf den Cubikfuß für die leeren Zwischenräume zu rechnen?

50. Ein Cubikfuß Kupfer wiegt gehämmert $585\frac{8}{19}$ Pfd., gegossen $513\frac{9}{20}$ Pfd.
Ein Cubikfuß Eisen wiegt gehämmert $539\frac{22}{23}$ Pfd., gegossen $474\frac{19}{28}$ Pfd. Wie viel beträgt diese durch das Hämmern vermehrte Schwere dieser Metalle auf einen rheinländischen Cubikfuß?

51. Ein Maaß reines Wasser wiegt 3 Pfund, 30 Loth. Gutes Baumöl wiegt $\frac{183}{200}$ so schwer,

schwer, als Wasser. Wie viel wiegt ein Maaß davon?

52. Der Druck des Luftkreises auf einer Fläche von 1 Quadratfuß beträgt (bey einer Barometerhöhe von 28 Zoll) 21 Centner, 4 Pfd., $14\frac{6}{11}$ Loth. Da man die Oberfläche eines erwachsenen Menschen, welche von allen Seiten diesen Druck leidet, ohngefähr auf 15 Quadratfuß rechnen kann, wie groß ist der Druck der Luft auf den menschlichen Körper?

53. Der Durchmesser der Erde ist $1718\frac{7}{8}$ deutsche Meilen. Nun ist der Durchmesser des Mondes $\frac{3}{11}$, des Mercurs $\frac{321}{800}$, der Venus $\frac{47}{49}$, des Mars $\frac{13}{25}$, des Jupiters $10\frac{25}{29}$, des Saturnus $9\frac{983}{1000}$, des Uranus $4\frac{1}{3}$ mal so groß, als der Durchmesser der Erde. Wie viele Meilen hat der Durchmesser eines jeden dieser Weltkörper?

54. Ein rheinländischer Cubikfuß Flußwasser wiegt 66 Pfd., 12 Loth, $2\frac{14}{15}$ Quint. Das Eis ist $\frac{11}{12}$ mal so schwer. Wie viel wiegt also ein C. Fuß Eis?

55. Der Feldberg bey Frankfurt ist ungefähr $\frac{1}{8}$, der Chimboraço aber $\frac{5}{7}$ von einer deutschen Meile hoch. Wie vielmal ist der letztere höher, als der erstere?

56. Wenn ein neugebohrnes Kind $7\frac{1}{2}$ Pfd. wiegt, und ein Erwachsener 150 Pfd., wie vielmal ist dieser schwerer, als das Kind?

57. Wie viele rheinländische Cubikfuß Eisen, deren jeder $539\frac{22}{23}$ Pfd. wiegt, braucht man zu einem großen Schiffsanker von 6000 Pfd.?

58. Theilt man den mittlern Abstand des Saturnus von der Sonne (welcher ohngefähr = 230000 Erdhalbmesser, deren jeder = 860 deutsche Meilen) in 100 gleiche Theile; so ist Mercur 0,04 solcher Theile von der Sonne entfernt,

die Venus 0,07
die Erde 0,10
der Mars 0,16
der Jupiter 0,52
der Uranus 1,96

Wie weit ist jeder von diesen von der Sonne?

59. Ein Centner sey = 100 Pfd. Es wiege an einem gewissen Werkzeuge das Holz 85 Pfd. = 0,85 Centner, das Eisen 227 Pfd. = 2,27 Centner, das Seilwerk und Tuch 15 Pfd. = 0,15 Centner. Wie groß ist die ganze Last?

60. Ein Kind wiege 0,26 Ctnr., ein erwachsener Mensch 1,3 Ctnr. Wie vielmal ist letzterer schwerer?

## III. Zum dritten Abschnitte.

61. Die Quadratwurzel aus 2809 zu finden.
62. — — — — 213444 — —
63. — — — — 78499600 — —
64. Die Cubikwurzel aus 274625 — —
65. — — — — 440711081 — —
66. — — — — 647214625000 - —

## IV. Zum vierten Abschnitte.

67. Wie viele Pfd. wiegt ein Cubikfuß Wasser in berliner Pfd., da er 70 pariser Pfd. wiegt. 10188 berliner Pfd. = 9750 par. Pfd.

68. Wenn man in 5 Schritten eine rheinländische Ruthe = 12 Schuh geht, wie viele Schritte gehen auf eine deutsche Meile = 23642 Schuh?

69. 2283 deutsche Meilen = 3802 alte französ. Meilen. Die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne ist in französischen Meilen 34357480. Wie viele deutsche Meilen sind dieses?

70. Fünf deutsche Meilen ohngefähr = 8 französische Lieues. Also 25 deutsche Quadratmeilen = 64 französ. Q. Meilen. Deutschland enthält 11120 deutsche Quadratmeilen, wie viele französ. sind dieses?

71. Von 100 Personen sterben im Durchschnitte jährlich 3. Wie viele sterben jährlich von den 25 Millionen in Deutschland?

72. Ein rheinländischer Cubikfuß trocknen Sandes wiegt $108\frac{1}{220}$ Pfd., durchnäßten $128\frac{1}{4}$ Pfd. Wenn ein Wagen von 18 Centnern trocknen Sandes durchnäßt wird, wie schwer wird er nun wiegen?

73. Wenn ein erwachsener Mensch $2\frac{2}{3}$ Fuß in einem Schritte geht, und ein Kind nur $1\frac{3}{4}$ Fuß, und der erste braucht zu einem gewissen Wege 20000 Schritte, wie viel braucht das Kind dazu?

74. Da eine Last Heringe 12 Tonnen hält, und eine Tonne ohngefähr 900 Heringe, wie viele stecken in 10000 Lasten?

75. Wie viele Brode braucht man zur Verpflegung eines Corps Soldaten von 10000 Mann auf 90 Tage (3 Monate), wenn jeder Soldat alle drey Tage ein Brod bekömmt?

76. Wenn ein Arbeiter täglich 500 Stück tönerne Tabakspfeifen machen kann, wie viele Groß (das Groß = 12 Dutzend = 144 Stück) werden 10 Arbeiter in 300 Tagen machen?

77. Wenn man 4 Pulsschläge auf 3 Secunden rechnet, wie weit ist eine Gewitterwolke entfernt, wenn man zwischen Blitz und Donner 20 Pulsschläge zählen kann, und der Schall in einer Secunde 1078 Fuß geht?

78. Hundert und fünfzig Bienen wiegen ein Loth, was wiegt ein Bienenstock von 20000 Bienen?

79. Wenn zwey Pumpen aus einem Wasserbehälter in 8 Minuten 30 Pfd. Wasser herausbringen können, wie viel können 5 Pumpen in 12 Stunden herausbringen?

80. Das Gold läßt sich so sehr ausdehnen, daß man mit einem Gran 660 Quadrat-

zoll

zoll bedecken kann. Wenn man einen Morgen Landes von 160 Quadratruthen bedecken wollte, wie viele Ducaten braucht man dazu? 67 Stück Ducaten wiegen 16 Loth. 144 Q. Zoll = 1 Q. Fuß, 144 Q. Fuß = 1 Q. Ruthe.

81. Die Goldfäden, aus welchen die goldenen Tressen gemacht werden, sind vergoldete Silberfäden. 2 Loth Gold reichen zu einem Faden von 111 Meilen hin. Wie viele Ducaten würden zur Vergoldung eines Fadens nöthig seyn, der um die ganze Erde gehen soll? Also 5400 Meilen lang. Ein holländischer Ducaten wiegt 978 Richtpfennige, deren 1024 auf ein Quentchen gehen.

82. Das Licht braucht, um von der Sonne auf die Erde zu kommen, 8 Minuten, 7 ½ Secunden Zeit. Dieses ist ein Weg von 20630754 Meilen. Wie lange geht es von dem nächsten Fixsterne bis zu uns, dessen Entfernung man von uns auf 4255381843056 Meilen schätzt.

83. Wie viele Jahre seines Lebens hat ein achtzigjähriger Mensch, der täglich 7 Stunden geschlafen hat, verschlafen? Das Jahr zu 365 ¼ Tagen gerechnet.

84. Drey Menschen verdienen in zwey Wochen 14 Fl., wie viel verdienen 20 Menschen in 10 Wochen?

85. 1000 Fl. Capital tragen zu 5 Procent in 1 Jahre 50 Fl. Interessen, wie viel Interessen bringen 32000 Fl. in 3 Jahren, wenn sie zu 4 Procent verliehen sind?

86. Ein Garten, welcher 500 Ruthen lang und 60 breit ist, kostet 1400 Fl., was kostet ein anderer, der 360 lang und 100 breit ist?

87. Ein Klaffter Holz, 12 Schuh lang, 4 hoch, 4 breit, kostet 12 Fl., was kostet ein anderes, das 6 lang, 6 hoch, 4 breit ist?

88. Ein Diamant, der da wiegt 1 Karat = 4 Gran, kostet 2 Rthlr. Die Preise der Diamanten wachsen, wie die Quadrate des Gewichts. Der Diamant des Königs von Portugall wiegt 1680 Karat, wie hoch ist sein Preis?

## Beyspiele von verkehrten Verhältnissen in der Regel de Tri und Kettenregel.

89. Titius leiht dem Cajus 1000 Fl. auf 8 Monate ohne Zinsen. Darauf leiht Cajus dem Titius 700 Fl., und will sie auch ohne

ohne Zinsen so lange stehen lassen, bis der letztere eben so viel profitiret hat, als er durch Ersparung der Zinsen gewonnen hat.

90. Ein Reisender, der von seinem Wohnorte nach Leipzig geht, und täglich 4 Meilen zurücklegt, braucht 10 Tage Zeit. Ein andermal legt er täglich 5 Meilen zurück, wie lange Zeit braucht er zur Reise?

91. Wenn einer täglich von seinem Taschengelde 30 Kr. ausgiebt, so kann er damit $\frac{1}{2}$ Jahr = 182 Tage reichen. Giebt er aber täglich 48 Kr. aus, wie lange kann er damit auskommen?

92. Wenn das Achtel Korn 5 Fl. kostet, so kauft man 100 Achtel für 500 Fl. Wenn es aber 8 Fl. kostet, wie viel kauft man alsdann für diese Summe?

93. Wie groß ist das Capital, das in 4 Monaten eben so viele Zinsen trägt, wie 6000 Fl. in 18 Monaten?

94. Von einem Zeug, das $\frac{5}{4}$ breit ist, braucht man 10 Ellen zu einem Kleide, wie viele von einem andern, das 2 Ellen breit ist?

95. Es vertauschet einer seinen Garten, der 50 Ruthen lang und 20 Ruthen breit ist, mit einem Stücke von einem Acker, der 80 Ruthen breit ist; wie lang muß das davon abzuschneidende Stück seyn, damit es dem Garten an Flächeninhalt gleich komme?

96. Wenn das Achtel Korn 10 Fl. kostet, so bekömmt man ein Brod von 3 Pfd. für 2 Batzen. Wenn das Achtel aber nur $7\frac{1}{2}$ Fl. kostet, wie viele Pfd. Brod bekomme ich alsdann für 2 Batzen?

97. 16 Menschen arbeiten täglich 12 Stunden an Auswerfung eines Grabens, welcher 6 Schuh tief wird. Zur ganzen Arbeit brauchen sie 4 Wochen = 24 Tage. Wenn 20 Menschen täglich 8 Stunden arbeiten, und den Graben 4 Schuh tief machen, wie lange arbeiten sie daran?

98. 50 Menschen machen einen Graben in 16 Tagen, welcher 400 Schuh lang, 10 Schuh tief, 15 Schuh breit ist, wie lange arbeiten 80 Mann an einem Graben, welcher 60 Schuh lang, 12 Schuh tief, 20 Schuh breit ist?

99. Ein Stück Land von 80 Quadratfuß kann man mit 8 Cubikfuß Gyps, wenn er 1 Zoll dick geworfen wird, bedecken, wie viel kann man mit $10\frac{2}{3}$ Cubikfuß bedecken, wenn er $1\frac{1}{3}$ Zoll dick geworfen wird?

100. Ein Canal durch den Isthmus von Suez 300000 Schuh lang, 120 Schuh tief, 60 Schuh breit, soll gegraben werden. Ein Mann kann in einem Tage graben 15 Schuh lang, 3 Schuh breit, 3 Schuh tief, wie viel Mann braucht man dazu, wenn er in 300 Tagen fertig seyn soll. Wenn 1 Mann in 1 Tag 2 Livres bekömmt, wie viel verdienen alle zusammen an Gulden in 365 Tagen oder in einem Jahre (weil die Feyertage mit bezahlt werden sollen)? 24 Livres = 11 Fl.

101. Vier Schreiber können in 5 Tagen 67 Bogen abschreiben, wie viele Tage brauchen 12 Schreiber zu 850 Bogen?

102. 3450 Soldaten können von dem Proviant einer Festung 5 Monate zehren, wenn jeder täglich $1\frac{1}{2}$ Pfund Brod bekömmt. Wenn aber 4000 Mann 6 Monate davon zehren sollen, wie viel kann einer des Tags bekommen?

103. 26 Centner sollen für 75 Rthlr. 30 Meilen weit gefahren werden, wie weit 16 Centner für 70 Rthlr.?

## Beyspiele zur Vermischungsrechnung.

104. Die beste Mischung zu metallenen Kanonen ist 36 Theile Kupfer, 3 Theile Zinn, 2 Theile Messing, wie viel von jedem kömmt zu einer Kanone von 8400 Pfd.?

105. Feines rothes Siegellack besteht aus 2 Theilen Terpentin, $\frac{1}{2}$ Theile Kreide, 3 Theilen Zinnober, 3 Theilen Schellack, wie viel braucht man von jedem zu 68 Pfd. Siegellack?

106. Gegen 21 Knaben werden jährlich 20 Mädchen gebohren, wie viele von jedem Geschlechte in einer Stadt, in der die ganze Anzahl der Neugebohrnen 28700 war?

107. Ein erwachsener Mensch kann von 150 Cubikzoll Luft nicht länger als eine Minute leben, weil so viel durch sein Einathmen verdorben wird. Wenn nun ein luftdichtes Zimmer 15 Schuh lang, 12 Schuh breit, 10 Schuh hoch wäre, wie viele Menschen könnten darinn, ohne Gefahr zu ersticken, eine Stunde leben?

In der letzten Aufgabe (welche eigentlich zu den Beyspielen von der verkehrten Regel de Tri gehört), wird ein rheinländischer Schuh zu 12 Zoll, also ein Cubikschuh zu 1728 Cubikzoll genommen.

Die Beyspiele Num. 80. und 81. gehören zur Kettenregel.

Num. 100 kann entweder auf 2 Sätze gebracht werden (den ersten nach der verkehrten Regel septem, den andern nach der Kettenregel), oder, wenn man die Zahl der Arbeiter nicht wissen will, sondern nur, was sie verdienen, so kann man folgenden Kettensatz machen:

X Gulden = 365 Tage

300 Tage = $\left\{\begin{array}{l}\text{300000 Schuh Länge}\\ \text{120 — Tiefe}\\ \text{60 — Breite}\end{array}\right\}$

$\left\{\begin{array}{l}\text{15' lang}\\ \text{3' tief}\\ \text{3' breit}\end{array}\right\}$ = 2 Livres

24 Livres = 11 fl.

Dieses nach der oben angeführten Weise angesetzt:

| | | | |
|---|---|---|---|
| X | X | 365 | 73 |
| | 30 | 300000 | 1000 |
| 3 | 15 | 120 | 5 |
| | 3 | 60 | 20 |
| 3 | 3 | 2 | 2 |
| | 24 | 11 | 11 |

9. X = (73 . 1000 . 5 . 20 . 2 . 11.)
X = 160600000 : 9
X = 17844444 $\frac{4}{9}$

Zum Beschluß noch ein Beyspiel zur Kettenregel (aus Lichtenbergs Schriften, 6ter Band, Seite 175.) Ein schnellsegelndes Schiff legt in einer Secunde 26 pariser Fuß zurück, wie viele deutsche Meilen in 24 Stunden?

X Meilen = 24 Stunden
1 Stunde = 3600 Sec.
1 Sec. = 26 pariser Fuß
22872 p. F. = 1 deutsche Meile

X = (24. 3600. 26) : 22872
X = 98, 2.

Auf-

## Auflösungen der vorstehenden Aufgaben.

1) Im Jahre 1786.
2) 248 Knochen.
3) 2072000 Q. M.
4) 365 — 366 Tage.
5) 16050 pariser Fuß.
6) 157 Jahre.
7) 1354 deutsche M.
8) 192174 deutsche M.
9) 313 Jahre.
10) 2620. Quadr. M.
11) 6216000000 Menschen.
12) Etwas mehr als 5-mal so viel.
13) 39447000 Pulsschläge.
14) 84 Meilen.
15) 90000 Menschen.
16) 8624 Fuß.
17) 21 — 22 Secund.
18) 51200 Fl.
19) 80500 Arten.
20) 14850 Rthlr.
21) Ohngefähr den 14ten Theil.
22) 5 mal so hoch.
23) 40000000.
24) 169589 — 4566 — 76 — 1.
25) 2248 Menschen.
26) 8 Menschen.
27) 29 Menschen.
28) 9 Menschen.
29) 31 Ctr., 31 Pfd., 26 Loth.
30) 4002 Fl. 48 Kr.
31) 476 Fl. 57 Kr.
32) 2 Pf., 20 Loth, 1 Q. 36 Gr.

33) 10 Tage 21 Stunden 10 Sec.

34) 7210600 Quadr. Meilen.

35) 62 Jahre, 3 Monate, 8 Tage.

36) 22 Fl., 16 Kr., 2 Hl.

37) 1 Jahr=31556928 Sec. D. Luther lebte 1964996736 Sec.

38) Eisenfeilspäne 33 Ctr. 50 Pfund, 20 Loth, Vitriolöl 33 Ctr., 50 Pfd., 20 Loth, Wasser 167 Ctr., 37 Pfd., 4 Lth.

39) Speise 2 Ctr. 57 Pfd. 24 Lth., Getränke 2 Ctr. 103 Pfd. 12 Lth.

40) Grün 6402 Pfd. 11 Lth. Trocken 3903 Pfd. 4 Lth. Unterschied 2499 Pfd. 7 Lth.

41) 212 Secunden.

42) 1250000 Ctr.

43) 125000 Pferde.

44) 4 Meil., 2460 Fuß.

45) 1 Quint, 38 $\frac{67}{144}$ Gran.

46) 562 $\frac{1}{2}$ rheinl. Fuß.

47) 20 $\frac{1}{10}$ Ruthen.

48) Um $\frac{7}{900}$ Tage, oder 11 Minuten 12 Secunden.

49) 4 $\frac{1168}{1551}$ Pfd.

50) 71 $\frac{369}{380}$ Pfd.
65 $\frac{179}{644}$ Pfd.

51) 3 Pfund, 19 $\frac{29}{100}$ Loth.

52) 315 Centr. 66 Pfd. 26 $\frac{2}{11}$ Lth.

53) Mond 468 Meil.
Mercur 689 —
Venus 1648 —
Mars 893 —
Jupiter 18670 —
Saturn 17159 —
Uranus 7448 —

54) 60 Pfd. 27 Lth. 2 $\frac{31}{45}$ Q.

55)

55) Ohngefähr 7 mal.
56) 20 mal.
57) 11 $\frac{1391}{12419}$ Cubikfuß.
58) Mercur 9200 Erdhalbmesser.
Venus 16100 —
Erde 23000 —
Mars 36800 —
Jupiter 119600 —
Uranus 450800 —
59) 3, 27 Centner.
60) 5 mal.
61) 53.
62) 462.
63) 8860.
64) 65.
65) 761.
66) 8650.
67) 73 Pfd., 4 Lth., 2 $\frac{166}{325}$ Q.
68) 9851 Schritte.
69) 20630754 deutsche Meilen.
70) 28467, 2 französ. Quadr. Meil.
71) 750000 Menschen.
72) 21 $\frac{8889}{23761}$ Ctr.
73) 27428 Schritte.
74) 108 Mill. Hering.
75) 300000 Brode.
76) 10416 Groß.
77) 16170 Fuß (ohngefähr $\frac{2}{3}$ einer deutschen Meile.)
78) 133 $\frac{1}{3}$ Loth (ohngefähr 4 $\frac{1}{4}$ Pfd.
79) 6750 Pfd.
80) 87 $\frac{39}{55}$ Ducaten.
81) 407 $\frac{2983}{6031}$ Ducat.
82) 1163 Tage und etwas drüber.
83) 23 $\frac{1}{3}$ Jahre.
84) 466 $\frac{2}{3}$ Fl.
85) 3840 Fl.
86) 1680 Fl.
87) 9 Fl.
88) 5644800 Rthlr.
89) 11 $\frac{3}{7}$ Monate.
90) 8 Tage.
91) 113 Tage.
92) 62 $\frac{1}{2}$ Achtel.
93) 27000 Fl.
94) 6 $\frac{1}{4}$ Ellen.

95) $12\frac{1}{2}$ Ruthen.
96) 4 Pfd.
97) $19\frac{1}{5}$ Tage.
98) 2,4 Tage.
99) 80 Quadratfuß.
100) $53333\frac{1}{3}$ Menschen.
$17844444\frac{4}{9}$ Fl.
101) $21\frac{29}{201}$ Tage.
102) 1 Pf. $2\frac{1}{2}$ Lth.
103) $45\frac{1}{2}$ Meile.
104) $7375\frac{25}{41}$ Pfund Kupfer, $614\frac{26}{41}$ Pfd. Zinn, $409\frac{31}{41}$ Pfd. Messing.
105) 16 Pfd. Terpentin
24 Pfd. Zinnober,
24 Pfd. Schellack,
4 Pfd. Kreide.
106) 14700 Knaben.
14000 Mädchen.
107) 345 Menschen.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Snell, Friedrich Wilhelm Daniel,

Leichtes Lehrbuch der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie für die ersten Anfänger

Bd.: 1

Gießen und Darmstadt 1813

Math.p. 532 f-1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082843-6